Todhunter, Isaac

حل علم مثلث

توڈہنٹر صاحب مطبوعہ مطبع سرکاری

Hal 'ilm-i musallas

مُحلّلہ

مولوی غلام مصطفےٰ صاحب (مولوی فاضل و زبدۃ الحکما) ایچ - پی - ای
دویم مدرس ریاضی و لکچرار طب یونانی کالج علوم مشرقی لاہور و ممبر
انجمن پنجاب و مصنف کتاب تاریخ متقدمین و شرح جبر مقابلہ و
رسالہ تشریح جسم انسانی و قرابادین مصطفائی وغیرہ

حسب الحکم

جناب معلے القاب ڈاکٹر جی ڈبلیو لیٹنر صاحب بہادر ایل ایل ڈی
بیرسٹرایٹ لا رجسٹرار و بانی مبانی بیت العلوم پنجاب

برائے استفادہ

طلباء پروفشنسی و ہائی پروفشنسی کے

مطبع انجمن پنجاب لاہور میں باہتمام کارپردازان مطبع مذکور کے طبع ہوا

سنہ ۱۸۸۲ع

۳۰۰

تعداد جلد

بسم اللہ الرحمن الرحیم

حامداً و مصلیاً

حمد و صلوٰۃ کے بعد تمام صاحبان ریاضی دان کی خدمت مین گذارش ہے کہ اس احقر نے حسب الحکم جناب معلے القاب ڈاکٹر جی ڈبلیو لیٹنر صاحب بہادر جل علم مثلث کا تیار کیا۔ جب وہ جناب فیض مآب بابو نوبین چندر رائے صاحب اسسٹنٹ رجسٹرار و سپرنٹنڈنٹ کالج علوم مشرقی لاہور کے ملاحظہ مین آیا تو اونہون نے نہایت مسرت خاطر اور دریا دلی سے اوسکے چھپنے کا حکم صادر فرمایا۔ اسلئے بحسب فرمان واجب الاذعان کے یہہ رسالہ روی لطبع لایا۔ لیکن ہرچند مینے اس کتاب کی ترتیب و تحلیل مین محنت اور جانفشانی کی ہے اور دل لگا کے نہایت عرقریزی اور جفاکشی سے کوشش کی ہے اور چونکہ یہہ ایک بڑا بھاری کام ہے اس ہیچمدان نے بغرض خیرخواہی و ہمدردی دیسی طلباء پنجاب یونیورسٹی کالج کے اپنے دوش پر اوٹھا کر انجام کو پہنچایا ہے اور حتی المقدور اسکی تصحیح و تنقیح پر اپنے وقت گرانمایہ کو صرف کیا ہے مگر پھر بھی احتمال ہے کہ کہین کچھ غلطی باقی رہگئی ہو۔ اسلئے یہہ ناچیز صاحبان اہل تمیز کی خدمت مین ملتجی ہے کہ اگر کہین کوئی سہو و خطا (جو کہ انسان کی سرشت مین بموجب الانسان مرکب من الخطاء والنسیان کے مخلوط ہے) سرزد پاوین تو اوسکو درست فرماکر طبع ثانی کے لئے بندہ کو مرہون منت اور مشکور ہمت فرماوین۔ بر کریمان کارہا دشوار نیست ✣

الملتمس

غلام مصطفی دویم مدرس ریاضی و لکچرار طب یونانی کالج علوم مشرقی لاہور مورخہ

۴۔ اکتوبر سنہ ۱۸۸۴ع

حل سوالات علم مثلث مستوی نمبر (۱)

س۱ چونکہ بموجب دفعہ (۸) کے متمم ا = ۹۰ - ا اور یہاں ا = ۱۵° - ۳۴′ - ۳″ ∴ ۹۰ - {۱۵° - ۳۴′ - ۳″} = ۷۴° - ۲۵′ - ۵۷″ = جواب ہے۔

پہلے سوال کے دوسرے جزو اسطرح ہونی چاہیے یعنی ۶۴° - ۴۴′ - ۳۱″ = ا جبکہ زاویہ مثبت قرار دیا جاوے ∴ بموجب دفعہ (۸) کے ۹۰ - {۶۴° - ۴۴′ - ۳۱″} = ۲۵° - ۱۵′ - ۲۹″ = جواب ہے

اور اصل سوال کا جواب = ۹۰ - (۱۱۴° - ۱۵′ - ۲۹″) = -(۲۴° - ۱۵′ - ۲۹″)

اور تیسرے جزو بھی کتاب میں غلط ہے اسطرح ہونی چاہیے بموجب دفعہ (۸) کے یہاں ا = ۱° - ۱′ - ۲″ ، تم ∴ ۹۰ - {۱° - ۱′ - ۲″ ، تم} = ۸۸° - ۵۸′ - ۵۸″ ، تم = جواب کتاب ہے۔

س۲ چونکہ بموجب دفعہ (۸) کے ضمیمہ ا = ۱۸۰ - ا اور یہاں ا = ۱۴۵° - ۱۵′ - ۲۰″ ∴ ۱۸۰ - {۱۴۵° - ۱۵′ - ۲۰″} = ۳۴° - ۴۴′ - ۴۰″ = جواب ہے۔

اور دوسرے جزو ا = -{۲۶° - ۱۲′ - ۶″} ∴ بموجب دفعہ

(۸) سے ۱۸۰° - {(۴۰° ۱۵′ ۱۰″) - ۱° ۲′} = ۲۰° ۴′ ۱۶″ - ۱′ - ۲″ =

جواب ہے ❖

س۳ چونکہ مثلث کی تین زاوی ملکر مساوی دو قائمون کے ہوتی ہین مگر بموجب منطے ایک قائمہ ہے تو باقی دو ملکر برابر ایک قائمہ کے ہونگے لیکن اونمین سے ایک = ۹° - ۹′ - ۹″ کے تو اسلئے دوسرا مساوی ہوگا ۹۰° - {۹° - ۹′ - ۹″} = ۸۰° - ۵۰′ - ۵۱″ = جواب ہے

س۴ چونکہ دو عددونکے فرق اور حاصلجمع کے مجموعہ کا نصف مساوی بڑے عدد کے ہوتا ہے اور اونکی حاصلتفریق کا نصف مساوی چھوٹے عدد کے تو اسلئے* $\frac{۹۰° + (۴۵° - ۲۴′ - ۲۴″)}{۲}$ = $\frac{۱۳۵° - ۲۴′ - ۲۴″}{۲}$ = ۶۷° - ۴۲′ - ۱۲″ = بڑے زاوے کی اور ۹۰° - $\frac{(۴۵° - ۲۴′ - ۲۴″)}{۲}$ = $\frac{۴۴° - ۳۵′ - ۳۶″}{۲}$ = ۲۲° - ۱۷′ - ۴۸″ = چھوٹے زاوی کے ❖

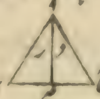
س۵ چونکہ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ پر زاوئے باہم برابر ہوتے ہین اسلئے دونو زاویونکا مجموعہ ۲ (۵۹° - ۵۹′ - ۵۹″) = ۱۱۹° - ۵۹′ - ۵۸″ اور چونکہ زاویہ راس باقی دو زاویونکا ضمیمہ ہوتا ہے ∴ زاویہ راس ۱۸۰° - (۱۱۹° - ۵۹′ - ۵۸″) = ۶۰° - ۰′ - ۲″ = جواب ہے

*یہان شمار کنندہ مین علامت نفی کی نہین سمجھنی چاہیئے بلکہ اوس سے خط فاصل مراد ہے

س ٦ فرض کرو کہ قاعدہ پر کا زاویہ ۲ و ہے تو زاویہ راس ۳ و
ہوگا اور ظاہر ہے کہ زاویہ راس باقی دو زاویون کا ضمیمہ
ہوتا ہے +

∴ ۱۸۰° — ۲ و = ۳ و ∴ ۱۰ و = ۱۸۰° ∴ و = ۱۸ اور ۲ و = ۳۶°
اور ۳ و = ۵۴° جو = زاویہ راس کے +

س ۷ اس سوال مین کتاب کی عبارت مین غلطی واقع ہوئی ہے یعنے
دو چند ہے متمم تیسرے زاویہ سے ، ہونی چاہئے +
فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے ا ب ج کی زاویہ راس سے



قاعدہ ج ب پر ا م عمود ڈالو جس کے زاویہ ب ا م اور
م ا ج کا نام ر اور و فرض کرو — چونکہ مثلث ا ب م کا ایک زاویہ
قائمہ ہے اور ایک کا نام ر ہے تو اسلئے دوسرے کا نام (ق - ر)
ہوگا اور اسیطرح سے مثلث ا م ج کی ج زاویہ کا نام (ق - و)
اور مثلث ا ب ج کے زاویہ راس کا (ر + و) ہوگا اور چونکہ
ضمیمہ (ر + و) زاویہ کا مجموعہ باقی دو زاویون کا ہے
∴ اونکو جمع کیا (ق - ر) + (ق - و) = ۲ ق - و - ر ...
اور (ق - ر) + (ق - و) = ۲ ق - و - ر ...
یعنے ۲ ق = ۳ و + ر ......(۱)
۲ ق = ۲ ... ... (۲) } دونون مجموعہ مین ضرب دیکر تفریق کیا

تو ۶ق = ۱۱ ∴ ر = ۶/۱۱ ق اور د = ۵/۱۱ ق اور (د + ر) زاویہ =

۱۱/۱۱ ق = ۹۰ × ۱/۱۱ = ۹/۱۱ ۸۱ ∴ (ق − ر) = (ق − ۶/۱۱ ق) = ۵/۱۱

ق = ۵ × ۹۰/۱۱ = ۱/۱۱ ۴۰ +

اور (ق − د) = ق − ۴ق/۱۱) = ۷/۱۱ ق = ۷ × ۹۰/۱۱ = ۳/۱۱ ۵۷ یعنی

(۹/۱۱ ۸۱ و ۱/۱۱ ۴۰ و ۳/۱۱ ۵۷) = ہر سہ زاویہ مثلث مفروض کے

حل سوالات علم مثلث مستوی نمبر (۲)

س ۱ بموجب ۹ حد کے یہ مساوات حاصل ہوئی ب/۱۸۰ = ھ/π لیکن جگہ
ھ سے س مراد ہے اسلئے ب/۱۸۰ = س/π اب طرفین مساوات
کو ۲ میں ضرب دیا تو ب/۹۰ = ۲س/π = جواب کے۔ بطرز دیگر
چونکہ گول ناپ ایک قایمہ = π/۲ ∴ د : ۹۰ :: س : π/۲ ∴ ب/۹۰ =
س/(π/۲) = ۲س/π پس معلوم ہوا کہ ب/۹۰ = ۲س/π فھو المطلوب +

س ۲ چونکہ گول ناپ زاویہ مرکزی بموجب دفعہ ۱۴ = ۹ انچ/۱۰ فٹ = ۹ انچ/۱۲۰ انچ = ۳/۴۰
اور چونکہ زاویہ غیر متغیر ہے درجوں کی تعداد = ۱۸۰/π ∴ ۱ : ۳/۴۰ :: ۱۸۰/π : د
∴ د = ۳/۴۰ × ۱۸۰/π = جواب کے +

س ۳ قایمہ قایمہ ۱ : ۵/۱۶ :: π/۲ : د ∴ د = π/۲ × ۵/۱۶ = ۵π/۳۲ = جواب اول کے
قایمہ قایمہ اور ۱ : ۵/۱۶ :: ۹۰ : د ∴ د = ۹۰ × ۵/۱۶ = ۴۵۰/۱۶ = ۱۲۵ ، ۲۸ = جواب

دوم کے +

س۴ فرض کرو کہ سب سے چھوٹا زاویہ = د اور دوسرا د + ر اور تیسرا یعنے سب سے بڑا = د + ۲ر ∴ بموجب شرائط سوال کے مساواتیں مندرجہ ذیل حاصل ہوئین +

د + د + ر + د + ۲ر = ۱۸۰ . . . . (۱)

د + ۲ر = ۲د . . . . (۲)

مساوات اول سے ۳د + ۳ر = ۱۸۰ یعنے د + ر = ۶۰

اور مساوات (۲) سے د = ۲ر پس د کی جگہ ۲ر کو رکھا تو

۲ر + ر = ۶۰ یعنے ۳ر = ۶۰ ∴ ر = ۲۰ یعنے فرق علم = ۲۰

اور د = ۴۰° ∴ سب سے چھوٹا زاویہ = ۴۰° اور دوسرا زاویہ = ۶۰° اور

سب سے بڑا = ۸۰° اور گول ناپ ۴۰° اسطرح نکالے ۹۰ : ۴۰ :: $\frac{\pi}{2}$: و د د =

$\frac{\frac{\pi}{2} \times 40}{90} = \frac{\pi 20}{90} = \frac{\pi 2}{9}$ اور علی ہذا القیاس گول ۶۰° =

$\frac{\frac{\pi}{2} \times 60}{90} = \frac{\pi 30}{90} = \frac{\pi}{3}$ اور گول ناپ ۸۰° =

$\frac{\frac{\pi}{2} \times 80}{90} = \frac{\pi 40}{90} = \frac{\pi 4}{9}$ پس تینون زاویونکے گول ناپ

$\frac{\pi 2}{9}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi 4}{9}$ ہوئین +

ش۵ فرض کرو کہ تینون زاوی س ک ع ہین اور انمین سے س سب سے چھوٹا اور ع سب سے بڑا ہے چونکہ ک کی گول ناپ $\frac{\pi}{2}$ ہے اسلئے ع کی

گول ناپ $\frac{ع\,\pi}{۱۸۰}$ ہوے ∴ س : $\frac{ع\,\pi}{۱۸۰}$ :: ۶۰ : π

∴ π س = $\frac{ع\,\pi}{۳}$ ∴ ۳ π س = ع π ∴ ۳ س = ع

پس مساواتین مندرجہ ذیل حاصل ہوئین +

س + ک + ع = ۱۸۰° ...... (۱)

۳ س = ع ...... (۲)

۲ ک = س + ع ...... (۳)

مساوات ۳ مین ع کی جگہ ۳ س رکھنے سے ۲ ک = ۴ س

∴ ک = ۲ س ∴ مساوات (۱) مین س + ۲ س + ۳ س = ۱۸۰

∴ ۶ س = ۱۸۰ ∴ س = ۳۰° اور ک = ۶۰° اور ع = ۹۰° پس ہر سہ زاویہ

= ۳۰° و ۶۰° و ۹۰° +

س ۹ چونکہ $\frac{\text{لنبائی قوس}}{\text{نصف قطر}}$ = گول ناپ زاویہ مرکزی ہی ∴ $\frac{\text{لنبائی قوس}}{۹}$ = گول ناپ زاویہ

ایک درجہ کے ∴ لنبائی قوس = ۹ × گول ناپ زاویہ ایک درجہ

= ۹ × $\frac{\pi}{۹۰ \times ۲}$ = $\frac{\pi}{۲۰}$ = $\frac{۳٫۱۴۱۵۹}{۲۰}$ = ۰٫۱۵۷ انچ = جواب

بطرز دیگر

اس سوال اگر نصف قطر کسی دایرہ کا ک ہو تو اوسکا محیط ۲ π ک ہوگا

بموجب دفعہ ۱۲ کے اسلئے محیط اسکا ۲ × π ہوگا یعنے ۱۸ × π لیکن

π = ۳٫۱۴۱۵۹ اسلئے ۱۸ × ۳٫۱۴۱۵۹ وغیرہ = ۵۶٫۵۴۸۶۲

یعنے اسقدر اسکا محیط ہوگا لیکن ہمنے ایک درجہ کی لنبائی معلوم کرنی ہے اسلئے اسکو ۳۶۰ پر تقسیم کیا تو مساوی جواب کے ہوگا ۵۶٫۵۴۸۶۲ / ۳۶۰ = ۰٫۱۵۷۰ وغیرہ انچ ✢

س ۷ ∵ ۲ ½ گز = ۲ ½ × ۳ = ۳ × ۵ / ۲ = ۱۵/۲ فٹ ∴ گول ناپ اُس زاویہ مرکزی کی جو ۴۰ فٹ کی قوس کے مقابل ہے = ۴۰ / (۱۵/۲) = ۸۰/۱۵ = ۱۶/۳ = ۵ ⅓ = جواب جزو اوّل ✢

اور گول ناپ ۴۰ درجہ = ۴۰ × π/۱۸۰ = ۲/۹ π جواب جزو دوم

س ۸ اس سوال میں تنہ سے مراد لپیٹ ہے یعنے محیط دایرہ اور موٹائی سے مراد قطر ہے یعنی اوسکا محیط معلوم ہے صرف قطر اوسکا دریافت کرنا ہے ✢

۳ × ۶ فٹ = ۱۸ ∴ درخت کی موٹائی = ۱۸/π = ۱۸/۳٫۱۴۱۵۹ = تقریباً ۵٫۷۲۹ فیٹ تقریباً ۵ فٹ ۹ انچ = جواب ✢

س ۹ یعنے زمین کا محیط ۲۵۰۰۰ میل ہے تو بتاو کہ اوسکا قطر کتنا ہے
اسلئے قطر = ۲۵۰۰۰/π = ۲۵۰۰۰/۳٫۱۴۱۵۹ = تقریباً ۷۹۵۸ میل = جواب

س ۱۰ بموجب شرائط سوال کے اسکے معنے یہہ ہین اگر زمین کی حرکت محوری کے باعث سے کوئی مقام خط استواء کا ۲۴ گھنٹہ مین ۲۵۰۰۰ میل طے کریگا

تو ایک دقیقہ مین کسقدر سطے کریگا اسلئے تناسب سے چونکہ ۲۴×۶۰ =
۱۴۴۰ منٹ کے ∴ ۱۴۴۰ منٹ : ۱ منٹ :: ۲۵۰۰۰ : د یعنی د = $\frac{۲۵۰۰۰}{۱۴۴۰}$ =
۱۷ $\frac{۱۳}{۳۶}$ *

حل سوالات نمبر (۳)

س ۱ فرض کرو کہ زاویہ معین ۱ ہے تو جم ۱ = $\sqrt{۱ - جب^۲ ۱}$ بموجب دفعہ ۲۹
= $\sqrt{۱ - (\frac{۳}{۵})^۲}$ = $\sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}}$ =
$\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}$ = $\frac{۴}{۵}$
اور مس ۱ = $\frac{جب ۱}{جم ۱}$ = $\frac{۳/۵}{۴/۵}$ = $\frac{۳}{۴}$ اور ظم ۱ = $\frac{جم ۱}{جب ۱}$ =
$\frac{۴/۵}{۳/۵}$ = $\frac{۴}{۳}$ اور قع ۱ = $\frac{۱}{جم ۱}$ = $\frac{۱}{۴/۵}$ = $\frac{۵}{۴}$ اور مق ۱ =
$\frac{۱}{جب ۱}$ = $\frac{۱}{۳/۵}$ = $\frac{۵}{۳}$ اور جبق ۱ = ۱ − جب ۱ = ۱ − $\frac{۳}{۵}$ = $\frac{۲}{۵}$ اور جمق ۱ =
۱ − جم ۱ = ۱ − $\frac{۴}{۵}$ = $\frac{۱}{۵}$ *

س ۲ فرض کرو کہ زاویہ معین ۱ ہو چونکہ جب ۱ = $\frac{مس ۱}{\sqrt{۱ + مس^۲ ۱}}$ بموجب دفعہ ۳۱
∴ جب ۱ = $\frac{۴/۳}{\sqrt{۱ + (\frac{۴}{۳})^۲}}$ = $\frac{۴/۳}{۵/۳}$ = $\frac{۴}{۵}$ *
اور ظم ۱ = $\frac{۱}{مس ۱}$ = $\frac{۱}{۴/۳}$ = $\frac{۳}{۴}$ *
اور قع ۱ = $\frac{۱}{جم ۱}$ = $\frac{۱}{۳/۵}$ = $\frac{۵}{۳}$ اور مق ۱ = $\frac{۱}{جب ۱}$ = $\frac{۱}{۴/۵}$ = $\frac{۵}{۴}$ اور
جبق ۱ = ۱ − جب ۱ = (۱ − $\frac{۴}{۵}$) = $\frac{۱}{۵}$ *

جمق ا = ۱ − جم ا = ۱ − ۳/۵ = ۲/۵ ٭

س ۳ فرض کرو کہ زاویہ معین ا تو جب ا = √(۱ − جم۲ ا) = √(۱ − (√۳/۲)۲)

= √(۱ − ۳/۴) = ۱/۲

اور مس ا = جب ا / جم ا = (۱/۲) / (√۳/۲) = ۱/√۳ و ظم ا = ۱/مس = √۳/۱

وقع ا = ۱/جم ا = ۱/(√۳/۲) = ۲/√۳ اور مق ا = ۱/جب ا = ۱/(۱/۲)

= ۲ و جمق ا = (۱ − جب ا) = ۱ − ۱/۲ = (۲ − ۱)/۲

وجمق ا = (۱ − جم ا) = ۱ − √۳/۲ = (۲ − √۳)/۲

س ۴ ثابت کرو کہ جب۲ θ مس θ + جم۲ θ ظم θ + ۲ جب θ جم θ = مس θ + ظم θ

بموجب دفعہ ۲۷ و ۲۹ جملہ اولے = (۱ − جم۲ θ) جب/جم + (۱ − جب۲)

جم/جب + ۲ جب θ جم θ

= {جب θ/جم θ − جب جم + جم/جب − جب جم + ۲ جب θ جم θ}

= جب θ/جم + جم θ/جب θ = مس θ + ظم θ فہو المطلوب ٭

س ۵ ۲ (جب۶ θ + جم۶ θ) − ۳ (جب۴ θ + جم۴ θ) + ۱ = ۰

= ۲ (جب۲ + جم۲) (جب۴ − جم۲ جب۲ + جم۴) − ۳ (جب۴ +

جم۴) + ۱ = ۲ (جب۴ − جب۲ جم۲ + جم۴) − ۳ (جب۴ + جم۴) + ۱

= ۲ جب۴ − ۲ جب۲ جم۲ + ۲ جم۴ − ۳ جب۴ − ۳ جم۴ + ۱

= ۱ − (جب۴ + جم۴ + ۲ جب۲ جم۲) = ۱ − (جب۲ + جم۲)۲

= ١ - ١ = فهو المطلوب

مساوات ہائے ذیل کو دریافت کرو

س٦ + جب٢θ = ٣/٢ چونکہ بموجب دفعہ ٢٩ جب٢ = ١ - جم٢

∴ ١ - جم٢ = ٣/٢ جم θ ∴ جم٢ + ٣/٢ جم = ١ تکمیل مجذور سے

جم٢ + ٣/٢ جم + ٩/١٦ = ٢٥/١٦ جذر لیا ٭

تو جم + ٣/٤ = ± ٥/٤ ∴ جم = ١/٢

چونکہ جم ٦٠° = ١/٢ ∴ θ = ٦٠° مگر ایک درجہ کی گول ناپ =

π/١٨٠ ∴ ٦٠° = π٦٠/١٨٠ = π/٣ = جواب ٭

س٧ جب θ + جم θ = ١ ∴ جم θ = √(١ - جب٢θ)

∴ √(١ - جب٢) = ١ - جب طرفین کا مال لیا تو

١ - جب٢ = ١ + جب٢ - ٢ جب θ عمل انتقال سے

٢ جب٢θ - ٢ جب = ٠ ∴ ٢ جب٢ = ٢ جب

∴ جب = ٠ یا ١ مگر صفر یا جب مستوی صفر درجہ یا ٩٠°

کی ہے ∴ θ = ٠ × π/١٨٠ = ٠ یا θ = ٩٠ × π/١٨٠ = π/٢

پس جواب = ٠ یا π/٢ ٭

س٨ مم θ = ٢ جم θ لیکن بموجب دفعہ ٢٠ مم θ = جم θ / جب θ

∴ جم θ / جب θ = ۲ جم θ مان لیا تو

جم۲ / جب۲ = ۴ جم۲ اخراج کسر سے

جم۲ = ۴ جم۲ جب۲ لیکن جب۲ = ۱ − جم۲

∴ جم۲ = ۴ جم۲ (۱ − جم۲) طرفین کو جم۲ پر تقسیم کیا تو

۱ = ۴ − ۴ جم۲ ∴ ۴ جم۲ = ۳ ∴ جم۲ = ۳/۲ طرفین کا جذر لیا تو

جم θ = √۳/۲ لیکن جم √۳/۲ = ۳۰° ∴ θ = ۳۰ مگر گول ناپ ۳۰°

= ۳۰ × π/۱۸۰ = π/۶ یا جم θ = ۰ ∴ θ = ۹۰° = ۹۰ × π/۱۸۰ = π/۲

س ۹ جب۲ θ − ۲ جم θ + ۱/۴ = ۰

یعنی ۱ − جم۲ θ − ۲ جم θ + ۱/۴ = ۰ ∴ جم۲ θ + جم θ = ۵/۴

مساوات بالا کو درجہ دویم کے ذریعہ حل کیا

تو جم θ = ∓ ۳/۲ − ۱ = ۱/۲

∴ θ = ۶۰° = π × ۶۰/۱۸۰ = π/۳

س ۱۰ ۳ قع۴ θ + ۸ = ۱۰ قع۲ θ عمل انتقال سے

۳ قع۴ θ − ۱۰ قع۲ θ = − ۸ ∴ قع۴ − ۱۰/۳ قع۲ = − ۸/۳ حل کیا مساوات

کو تو قع θ = ۱ ∴ θ = ۴۵° ، = π × ۴۵/۱۸۰ = π/۴

یا قع θ = ۲/√۳ لیکن قع ۲/√۳ = ۳۰°

س ۱۱ جواب دوم کے = $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\pi \times 30}{180}$ = گول ناپ ∴ ۳۰° = ۵۰°
معلوم ہے کہ جب (ا − ب) = ½ × مگر ½ جیب مستوی ۳۰°
درجہ کی ہوتی ہے ∴ ا − ب = ۳۰° اور جم (ا + ب) = ½
مگر ½ جم ۶۰° درجہ کی ہوتی ہے ∴ ا + ب = ۶۰° اب دونو
مساواتون کو جمع کیا تو ۲ا = ۹۰° ∴ ا = ۴۵° اور تفریق کیا تو
۲ب = ۳۰° ∴ ب = ۱۵° ؞

حل سوالات نمبر ۴

س ۱ ۵۸۵° − ۳۶۰ = ۲۲۵° پس جو نسبتین ۲۲۵° کی ہونگی وہی ۵۸۵° کی ہونگی ؞

س ۲ چونکہ تقسیم مختصر قاعدہ تفریق کا ہے اسواسطے ۶۹۰° کو ۳۶۰° پر تقسیم کیا جو باقی رہا اوسکی نسبتین موافق ۶۹۰° کے نسبتون کے ہونگے علی ہذا القیاس ۳ و ۴ سوال ؞

س ۵ مس ۴۵° = ۱ اور مس ۴۵ = مس (۱۸۰ + ۴۵)
= مس ۲۲۵ اور ۲۲۵° = مس (۱۸۰° + ۲۲۵°) = مس ۴۰۵
عدد ۱ اور مس ۴۰۵° = مس (۱۸۰° + ۴۰۵°) = مس ۵۸۵ عدد ۱
علی ہذا القیاس ۱۸۰ در جمع کرجاؤ جبتک کہ ۹۰° سے کم رہین اون سب کے

مس برابر ایک کے رہیگی +

س — جم۲ = ۱/۲ ∴ جم = ۱/√۲ اور جم۲ = ۱ - جب۲ پس جب۲ = ۱/۲ یعنے جب = ۱/√۲

اور جم یا جب ۴۵° = ۱/√۲ پس پہلا زاویہ ۴۵° اور چونکہ جم (۹۰ + ۴۵) =

- جم ۱۳۵° پس دوسرا زاویہ ۱۳۵° علےٰ ہذا القیاس ۹۰ کو جمع کرتے جاؤ

جبتک کہ ۳۶۰ سے کم رہیں +

ش — جمق ن π/۴ = ۱ - جم ن π/۴ اول فرض کرو کہ ن = ۰ پس ۱ - جم ن π/۴ =

۱ - جم ۰° = ۱ - ۱ = ۰ پھر فرض کرو کہ ن = ۱ تو ۱ - جم ن π/۴ = ۱ - جم π/۴ =

۱ - جم ۴۵° لیکن جم ۴۵ = ۱/√۲ پس ۱ - جم ن π/۴ = ۱ - ۱/√۲ پھر فرض کرو

کہ ن = ۲ تو ۱ - جم ن π/۴ = ۱ - جم ۲π/۴ = ۱ - جم ۹۰° لیکن جم ۹۰° =

پس = ۱ کے پھر فرض کرو کہ ن = ۳ کی ۱ - جم ن π/۴ = ۱ - جم ۳π/۴ =

۱ - جم ۱۳۵° لیکن جم ۱۳۵° = - ۱/√۲ پس ۱ - جم ن π/۴ = ۱ + ۱/√۲ چہارم

فرض کرو کہ ن = ۴ تو ۱ - جم ن π/۴ = ۱ - جم ۱۸۰° لیکن جم ۱۸۰ =

ش — ۱ - (-۱) = ۲ اول فرض کرو کہ ن = ۰ کی جب {ن π/۲ + (-۱)^ن π/۶}

= جب {۰ + ۱ × π/۶} = جب π/۶ = جب ۳۰° = ۱/۲ پھر فرض کرو

کہ ن = ۱ کی جب {ن π/۲ + (-۱)^ن π/۶} جب (π/۲ - π/۶) =

جب (۳π - π)/۶ = جب ۲π/۶ = جب ۶۰° = √۳/۲ پھر فرض کرو

کہ ن = ۲ تو جب {ن π/۲ + (-۱)^ن π/۶} = جب {۲π/۲ - π/۶}

= (π۹ − π)/۹ = جب π۸/۹ = π۴/۳ = جب ۲۴۰ = جب ۱۸۰+۶۰

= − جب ۶۰ = − √۳/۲ ❊

س ۹ جب³ ۵ + جم³ ۵ = ۰ یعنے (جب ۵ + جم ۵)(جب² ۵ − جب ۵ جم ۵ + جم² ۵) = ۰ ∴ جب ۵ + جم ۵ = ۰ ∴ جب ۵ = − جم ۵ لیکن جب کسی زاویہ مساوی منفی جم اوسی کے اوسوقت ہوتی ہے جبکہ زاویہ ۵ ۱۳۵° کا ہو پس ۵ = ۱۳۵° اسیطرح دوسری مساوات کو حل کرکے اور قیمت معلوم ہوسکتی ہے ❊

س ۱۰ ۲ جب² ۵ − ۵ جم ۵ − ۴ = ۰ یعنے ۲ جب² ۵ کو جم کی صورت مین لانے سے ۲ − ۲ جم² ۵ − ۵ جم ۵ − ۴ یعنے ۲ جم² ۵ + ۵ جم ۵ = ۲ یا جم² ۵ + ۵/۲ جم ۵ = −۱ مساوات کو حل کیا تو جم ۵ = − ½ لیکن جم ۱۲۰° = − ½ پس ۵ = ۱۲۰° ❊

س ۱۱ اول فرض کرو کہ ۵ = ۰ تو جم ۵ − جب ۵ = جم ۰° − جب ۰° لیکن جم ۰° = ۱ اور جب ۰° = ۰ پس جم ۰° − جب ۰° = ۱ ❊

پھر فرض کرو کہ ۵ = ۴۵° تو جم ۵ − جب ۵ = جم ۴۵° − جب ۴۵° = ۱/√۲ − ۱/√۲ = ۰ ❊

پھر فرض کرو کہ ۵ = ۹۰° تو جم ۵ = جم ۹۰° − جب ۹۰° = ۰ − ۱ = −۱ ❊

پھر فرض کرو کہ ہ = ۱۲۰° تو جم ہ - جب ہ = $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

پھر فرض کرو کہ ہ = ۱۳۵° تو جم ہ - جب ہ = $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} =$ $-\sqrt{2}$ علے ہذا القیاس ۱۲ و ۱۳ سوال ہے +

س ۱۴ چونکہ قع کسی زاویہ کا ہمیشہ کسر غیر واجب ہوتی ہے پس اگر $\frac{4 ا ب}{(ا + ب)^2}$ کسر غیر واجب ہے تو مساوات ممکن ورنہ غیر ممکن

چونکہ $(ا - ب)^2 > 0 \therefore ا^2 - 2 ا ب + ب^2 > 0$ طرفین مین ۴ ا ب شامل کیا تو $ا^2 + 2 ا ب + ب^2 > 4 ا ب$ یعنے $(ا + ب)^2 > 4 ا ب$

یعنے $\frac{4 ا ب}{(ا + ب)^2}$ مین کسر چھوٹے ہے مخرج سے تو یہہ کسر واجب ہوئی

$\therefore$ قع^2 ہ $= \frac{4 ا ب}{(ا + ب)^2}$ مساوات ممکن نہین ہے +

س ۱۵ ثابت کرو کہ مس (ا + ۹۰) = - مم ا چونکہ مس (ا + ۹۰) = $\frac{جب (ا + ۹۰)}{جم (ا + ۹۰)} = \frac{جم ا}{-جب ا} =$ - مم ا +

اور ثابت کرو کہ مم (ا + ۹۰°) = - مس ا چونکہ مم (ا + ۹۰) = $\frac{جم (ا + ۹۰)}{جب (ا + ۹۰)} = \frac{-جب ا}{جم ا} =$ - مس ا +

اور ثابت کرو کہ قع (ا + ۹۰) = - مق ا چونکہ قع (ا + ۹۰) = $\frac{1}{جم (ا + ۹۰)} = \frac{1}{-جب ا} =$ - مق ا اور مق (ا + ۹۰) = قع ا

چونکہ مق (ا + ۹۰) = $\frac{1}{جب (ا + ۹۰)} = \frac{1}{جم ا} =$ قع ا × اور جبق (ا + ۹۰) = ۱ - جم (ا + ۹۰) = ۱ + جب ا +

حل سوالات نمبر ۵

س ۱ — مس θ = ۱ چونکہ مس ۴۵° = ۱ ∴ θ = ۴۵ اسکی عام صورت یہہ ہے
ن π + $\frac{۴۵ \pi}{۱۸۰}$ = ن π + $\frac{\pi}{۴}$ = جواب کے ❊

س ۲ — جب θ = ۱ لیکن جب ۹۰ = ۱ ∴ θ = ۹۰° اسکی عام صورت یہہ ہے
۲ ن π + $\frac{\pi}{۲}$ یعنے اون زاویون کے ۲ ن π شامل کرنے سے
بنتی ہین ∴ جواب = (۲ ن + $\frac{۱}{۲}$) π ❊

س ۳ — جم θ = ۱ لیکن جم ۰° = ۱ ∴ θ = ۰ عام صورت یہہ ہے ۲ ن + ۰ =
۲ ن π یعنے اول ❊

س ۴ — جم θ = − $\frac{۱}{۲}$ لیکن جم ۱۲۰° = − $\frac{۱}{۲}$ ∴ اسکی عام صورت ۲ ن π ±
$\frac{۲\pi}{۳}$ ہو سکی ❊

س ۵ — جب^{۲} θ = جب^{۲} ا جذر لیا تو جب θ = جب ا اسلئے جن زاویون کے
جب (ا) زاویہ کی جب کے برابر ہو گی اونکی جب θ زاویہ کی جب کے
بھی مساوی ہو گی ❊

س ۶ — مق^{۲} θ = $\frac{۴}{۳}$ جذر لیا تو مق θ = $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ لیکن $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ = مق ۶۰° پس
θ = ۶۰° چونکہ عام صورت مق کی وہی ہے جو عام صورت جب کے
ہے اور عام صورت جب کی ن π ± ا ہے پس جواب = ن π ± $\frac{۶۰\pi}{۱۸۰}$

= ن $\pi \mp \frac{\pi}{4}$ ۔

س ۷ جم^{2} θ = جم^{2} ۱ جذر لیا تو جم θ = جم ۱ یعنی θ کی جم کی وہی قیمت ہوگی جو ۱ کی جم کی قیمت ہے خواہ مثبت ہو خواہ منفی اور ۱ کی جم کی قیمت ہی ہوگی جو اسکے ساتھ ۱۸۰ یا ۳۶۰ یا وغیرہ یعنے ن π ملانے سے یا تفریق کرنے سے بنتے ہیں ∴ جواب = ن π ± ۱ ۔

س ۸ قع^{2} θ = ۲ جذر لیا تو قع θ = ± √۲ لیکن قع ۴۵° = √۲ اور قع کی عام صورت ن π ± $\frac{\pi}{4}$ ۔

س ۹ مس^{2} θ = مس^{2} ۱ جذر لیا تو مس θ = ± مس ۱ ∴ ± مس ۱ کی وہی قیمت ہوگی جو مس (ن π ± ۱) ہوگی ۔

س ۱۰ مس^{2} θ = $\frac{1}{3}$ ∴ مس θ = ± $\frac{1}{\sqrt{3}}$ لیکن مس ۳۰° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ عام صورت ن π ± $\frac{\pi}{6}$ ۔

س ۱۱ حسب دفعہ ۳۹ آلات مثلثی کسی زاویہ کے خواہ وہ زاویہ مثبت ہو خواہ منفی ہمیشہ چار قائمے یا کسی ضعف چار قائمے کی اوس زاویہ میں شامل کرنے سے نہیں بدلتی اسلئے جب اور جم ۲ ن π + ۱ کے وہی ہونگیں جو جب اور جم ۱ کی ہیں اور سوا ۱ کے اور کوئی زاویہ ایسا نہیں ہوسکتا جسکی جب اور جم مثل ۱ کے جب اور جم کے ہو ۔

س ١٢ چونکہ جب اور جم دونون تیسری ربع مین منفی ہوتے ہین پس معلوم ہوا کہ ہ زاویہ تیسری ربع مین ہے اور وہ زاویہ جسکی جب = - ½ اور جم = - √٣/٢ کہ ہو ۲۱۰° کا ہے پس ہ = ۲۱۰° = ۲۱۰ π/۱۸۰ = ۷π/۶ ۰

عام صورت = ۲ ن π + ۷π/۶ کیونکہ بموجب دفعہ ۳۹ آلات مثلثی کسی زاویہ کے خواہ مثبت خواہ منفی بچار قائمی یا چار قائمی کی کسی ضعف کے ملانے سے متغیر نہین ہوتی +

حل سوالات نمبر ۶

س ١ (جم ا + جب ا)/(جم ا - جب ا) = مس ۲ا + قع ۲ا کسر اور مخرج کو شمار کنندہ مین ضرب کیا ∴ (جم ا + جب ا)²/(جم² ا - جب² ا) = (۱ + ۲ جم ا جب ا)/جم ۲ا بموجب دفعہ ۱، = (۱ + جب ۲ا)/جم ۲ا = جب ۲ا/جم ۲ا + ۱/جم ۲ا = مس ۲ا + قع ۲ا +

س ۲ ۲ جب² ا جب² ب + جم² ۲ا جم² ب = ۱ + جم ۲ا جم ۲ب بموجب دفعہ ۱، (۱ - جم ۲ا) (۱ - جم ۲ب)/۲ + (۱ + جم ۲ا) (۱ + جم ۲ب)/۲

= (۲ + ۲ جم ۲ا جم ۲ب)/۲ = ۱ + جم ۲ا جم ۲ب +

س ۳ مس (ہ π/۴ + ا) - مس (π/۴ - ا) = ۲ مس ۲ا

= بموجب دفعہ ۴۰، (۱ + مس ا)/(۱ - مس ا) - (۱ - مس ا)/(۱ + مس ا)

= ((۱ + مس ا)² - (۱ - مس ا)²)/(۱ - مس² ا)

= ۴ مس ا / ۱ - مس۲ ا = ۲ × ۲ مس ا / ۱ - مس۲ ا = ۲ مس ۲ ا

س ۴ جب ۳ ا مس ا - جم ۳ ا قسع ا = ۲ حسل بموجب دفعہ ۲۰۸

{جب ۳ ا / جب ا - جم ۳ ا / جم ا} = {۳ جب ا - ۴ جب۳ ا ... / جب ا}

- ۴ جم۳ ا - ۳ جم ا / جم ا } = ۲ - ۴ (جب۲ ا + جم۲ ا) لیکن بموجب دفعہ ۲۸۰

کے ۱ = ۱ : ۲ - ۴ = ۲ ÷

س ۵ ۳ جب ا - جب ۳ ا = ۲ جب ا (۱ - جم ۲ ا) جملہ اول بموجب دفعہ

= {۳ جب ا - (۳ جب ا - ۴ جب۳ ا)} = ۴ جب۳ ا

= ۲ جب ا (۲ جب۲ ا) لیکن یہہ بموجب دفعہ ۱۱ = ۲ جب ا

(۱ - جم ۲ ا) ÷

س ۶ جب ا + ۲ جب ۳ ا + جب ۵ ا / جب ۳ ا + ۲ جب ۵ ا + جب ۷ ا — جب ۳ ا / جب ۵ ا جملہ اول بموجب دفعہ ۲۰

۲ جب (ا + ۵ ا) / ۲ جم (ا - ۵ ا) / ۲ + ۲ جب ۳ ا / ۲ جب (۳ ا + ۷ ا) / ۲ جم (۳ ا - ۷ ا) / ۲ + ۲ جب ۵ ا = ۲ جب ۳ ا جم ۲ ا + ۲ جب ۳ ا / ۲ جب ۵ ا جم ۲ ا + ۲ جب ۵ ا

= ۲ جب ۳ ا (جم ۲ ا + ۱) / ۲ جب ۵ ا (جم ۲ ا + ۱) = جب ۳ ا / جب ۵ ا ÷

س ۷ جب ب / جب ا = جب (۲ ا + ب) / جب ا - ۲ جم (ا + ب)

جملہ ثانی کو حسل کیا تو

= جب ۲ ا . جم ب + جم ۲ ا جب ب - ۲ (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جب ا / جب ا

چونکہ جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا

اور ۲ جب^{۲} ا = ۱ − جم ۲ ا

∴ [(۲ جب ا جم ا) جم ا + جم ۲ ا جب ا − (جب ا جم ا) جم ا + (۱ − جم ۲ ا) جب ا] ÷ جب ا

= جب ۳ ا ÷ جب ا ٭

س ۸ | جب ۴ ا = ۴ جب ا جم^{۳} ا − ۴ جم ا جب^{۳} ا

جب ۴ ا = جب (۳ ا + ا) = جب ۳ ا جم ا + جم ۳ ا جب ا

بموجب دفعہ ۲۰ ٭

(۳ جب ا − ۴ جب^{۳} ا) جم ا + (۴ جم^{۳} ا − ۳ جم ا) جب ا

= ۴ جب ا جم^{۳} ا − ۴ جم ا جب^{۳} ا ٭

س ۹ | (جم ا − جم ۳ ا) ÷ (جب ۳ ا − جب ا) = مس ۲ ا بموجب دفعہ ۱۱ جملہ اولی =

[۲ جب ((ا + ۳ ا)/۲) جب ((۳ ا − ا)/۲)] ÷ [۲ جم ((ا + ۳ ا)/۲) جب ((۳ ا − ا)/۲)] = (۲ جب ۲ ا × جب ا) ÷ (۲ جم ۲ ا × جب ا)

= مس ۲ ا ٭

س ۱۰ | (جم ۲ ا − جم ۴ ا) ÷ (جب ۴ ا − جب ۲ ا) = مس ۳ ا بموجب دفعہ ۱۱ جملہ اولے =

[۲ جب ((۲ ا + ۴ ا)/۲) جب ((۴ ا − ۲ ا)/۲)] ÷ [۲ جم ((۲ ا + ۴ ا)/۲) جب ((۴ ا − ۲ ا)/۲)] = (۲ جب ۳ ا جب ا) ÷ (۲ جم ۳ ا جب ا)

= جب ۳ ا ÷ جم ۳ ا = مس ۳ ا ٭

س ۱۱ | مق ۲ ا + مم ۴ ا = مم ا − مق ۴ ا

= ۱ ÷ جب ۲ ا + جم ۴ ا ÷ جب ۴ ا لیکن جزو ثانی = جم (۲ ا + ۲ ا) ÷ جب (۲ ا + ۲ ا) = (جم^{۲} ۲ ا − جب^{۲} ۲ ا) ÷ (۲ جب ۲ ا جم ۲ ا)

= (جم^{۲} ۲ ا − (۱ − جم^{۲} ۲ ا)) ÷ (۲ جب ۲ ا جم ۲ ا) = (۲ جم^{۲} ۲ ا − ۱) ÷ (۲ جب ۲ ا جم ۲ ا) اسکو پہلے جزو کے ساتھ

شامل کیا $\frac{۱}{\text{جب ۱۲}}$ + $\frac{\text{۲.جم}^{۲}\text{۱۲} - ۱}{\text{۲جب ۱۲ جم ۱۲}}$ = $\frac{\text{۲.جم}^{۲}\text{۱۲} + \text{۲جم ۱۲} - ۱}{\text{۲جب ۱۲ جم ۱۲}}$ — $\frac{۱}{\text{۲جب ۱۲ جم ۱۲}}$

= $\frac{\text{۲.جم ۱۲ (۱ + جم ۱۲)}}{\text{۲.جم ۱۲ × جب ۱۲}}$ — $\frac{۱}{\text{۲جب ۱۲ جم ۱۲}}$ +

= $\frac{\text{۱ + جم ۱۲}}{\text{جب ۱۲}}$ — $\frac{۱}{\text{جب ۱۴}}$ =

$\frac{\text{۲ جب}^{۲}\text{۱}}{\text{۲.جم ۱ جب ۱}}$ — $\frac{۱}{\text{جب ۱۴}}$ = مم ۱ - مق ۱۴ ۱

س ۱۲ جم^{۲} (۱ - ب) + جم^{۲} ب - ۲ جم (۱ - ب) جم ۱. جم ب

= جم (۱ - ب) {جم (۱ - ب) - ۲ جم ۱. جم ب} + جم^{۲} ب = ۱

لیکن {جم (۱ - ب) - ۲ جم ۱ جم ب} = جب ۱ جب ب - جم ۱ جم ب

= - جم (۱ + ب)

∴ - جم (۱ - ب) × جم (۱ + ب) لیکن یہہ بموجب دفعہ ۳ =

- (جم^{۲} ب - جب^{۲} ۱) + جم^{۲} ب +

= - جم^{۲} ب + جب^{۲} ۱ + جم^{۲} ب = جب^{۲} ۱ +

س ۱۳ جب^{۲} (۱ - ب) + جب^{۲} ب + ۲ جب (۱ - ب) جب ب. = جب^{۲} ۱

= جب (۱ - ب) {جب (۱ - ب) + ۲ جب ب . جم ۱} ۲ جب =

جب^{۲} ۱ +

= جب (۱ - ب) جب (۱ + ب) + جب^{۲} ب جب^{۲} ۱ +

بموجب دفعہ ۳، = جب^{۲} ۱ - جب^{۲} ب + جب^{۲} ب = جب^{۲} ۱ +

س ۱۴ $\frac{\text{۱ - مس}^{۲}\text{(۵۰ - ۹)}}{\text{۱ + مس}^{۲}\text{(۴۵ - ۱)}}$ = جب ۲ ۱ بموجب دفعہ ۴۷

(۱ - ((۱-مس ا)/(۱+مس ا))^۲) / (۱ + ((۱-مس ا)/(۱+مس ا))^۲) = ((۱+مس ا)^۲ - (۱-مس ا)^۲) / ((۱+مس ا)^۲ + (۱-مس ا)^۲)

= ۴ مس ا / ۲(۱+مس^۲ ا) = ۲ مس ا / (۱+مس^۲ ا) یہ بموجب دفعہ ۲۶ = جب ۲ا

س ۱۵ ۴ مس ا - ۴ مس^۳ ا / (۱+مس^۲ ا)^۲ = جب ۴ا جملہ اول = (۴ مس ا (۱ - مس^۲ ا)) / (۱+مس^۲ ا)^۲

= (۴جب ا / جم ا - ۴جب^۳ ا / جم^۳ ا) / (۱ + جب^۲ ا / جم^۲ ا)^۲ = ۴ جب ا جم ا (جم^۲ ا - جب^۲ ا) / (جم^۲ ا + جب^۲ ا)

= ۲ جب ۲ا جم ۲ا = جب ۴ا +

س ۱۶ جب ا (۱ + مس ا) + جم ا (۱ + مم ا) = قع ا + مق ا جملہ اول

= {جب ا + جب^۲ ا / جم ا + جم ا + جم^۲ ا / جب ا} = {جب ا + جم ا +

جب^۲ ا × ۱/جم ا + جم^۲ ا × ۱/جب ا} = جب ا + جم ا + (۱ - جم^۲ ا) ۱/جم ا

+ (۱ - جب^۲ ا) ۱/جب ا = {جب ا + جم ا + ۱/جم ا - جم ا + ۱/جب ا

- جب ا} = ۱/جم ا + ۱/جب ا = قع ا + مق ا +

س ۱۷ (جب ۳ا + جم ۳ا) / (جب ۳ا - جم ۳ا) = (۱ + ۲ جب ۲ا) / (۱ - ۲ جب ۲ا) × مس (ا - ۴۵°)

جملہ اول = (جب ۲ا جم ا + جم ۲ا جب ا + جم ۲ا جم ا - جب ۲ا جب ا) / (جب ۲ا جم ا + جم ۲ا جب ا - جم ۲ا جم ا - جب ۲ا جب ا)

شمار کنندہ بموجب دفعہ ۱۷ +

جب ۲ا جم ا + (۲ جم^۲ ا - ۱) جب ا + (۱ - ۲ جب^۲ ا) جم ا - جب ۲ا جب ا

= جب ۲ا جم ا + جب ۲ا جم ا - جب ا + جم ا - جب ۲ا جب ا - جب ۲ا جب ا

= جب ۲ ا (جم ا - جب ا) + جب ۲ ا (جم ا - جب ا) + (جم ا - جب ا)

جملہ (جم ا - جب ا) کے سر کو جمع کرکے اسمین ضرب دینا چاہیے ؞

= (۱ + ۲ جب ۲ ا) (جم ا - جب ا) اسکے بعد یہی عمل نسب نما پر کیا جاوے

تو اسیطور پر اوسکا حاصل بھی ہوگا لیکن علامت مختلف ہونگے

یعنے اسطور پر (۱ - ۲ جب ۲ ا) (جم ا + جب ا) ؞

یعنے دونون سے یہہ حاصل ہوگا (۱ + ۲ جب ۲ ا) / (۱ - ۲ جب ۲ ا) × (جب ا - جم ا) / (جب ا + جم ا)

لیکن اخیر کی جزو مساوی مس (ا - ۴۵°) ہے کیونکہ مس (ا - ۴۵°)

کا = (مس ا - ۱) / (مس ا + ۱) = (۱ - جب ا / جم ا) / (۱ + جب ا / جم ا) = (جب ا - جم ا) / (جب ا + جم ا)

∴ رقم بالا = (۱ + ۲ جب ۲ ا) / (۱ - ۲ جب ۲ ا) × مس (ا - ۴۵°) [illegible]

س ۱۸ جم ا + جم (۱۲۰° - ا) + جم (۱۲۰° + ا) = ۰ بموجب دفعہ ۲۲

∴ جم ا + جم (۱۲۰° - ا) + جم (۱۲۰° + ا) = جم ا + ۲ جم ۱۲۰° جم ا

= جم ا + ۲ × - ۱/۲ × جم ا کیونکہ جم ۱۲۰° = - ۱/۲

∴ جم ا - جم ا = ۰

س ۱۹ ۴ جب ا جب (۶۰° - ا) جب (۶۰° + ا) = جب ۳ ا

= ۴ جب ا (جب ۶۰° جم ا - جم ۶۰° جب ا) (جب ۶۰° جم ا + جم ۶۰° جب ا)

= ۴ جب ا (جب^۲ ۶۰° جم^۲ ا - جم^۲ ۶۰° جب^۲ ا) لیکن جب ۶۰° = √۳ / ۲ اور

جم ۶۰° = ۱/۲ ؞

∴ ۴ جب ا (۳/۴ × جم^۲ ا − ۱/۴ × جب^۲ ا) = ۴ جب ا {۳/۴ (۱ − جب^۲ ا)
− ۱/۴ جب^۲ ا} ٭

= ۴ جب ا (۳/۴ − ۳/۴ جب^۲ ا − ۱/۴ جب^۲ ا)

= ۴ جب ا (۳/۴ − جب^۲ ا) = ۳ جب ا − ۴ جب^۳ ا لیکن یہہ
بموجب دفعہ ۸۰ = جب ۳ ا ٭

س ۲۰ ۴ جم ا جم (۱۲۰° − ا) جم (۱۲۰° + ا) = جم ۳ ا ٭

جملہ اوسے ٭

= ۴ جم ا (جم ۱۲۰° جم ا + جب ۱۲۰° جب ا) (جم ۱۲۰ جم ا − جب ۱۲۰ جب ا)

= ۴ جم ا (جم^۲ ۱۲۰ جم^۲ ا − جب^۲ ۱۲۰° جب^۲ ا) لیکن جم ۱۲۰° = − ۱/۲ اور جب ۱۲۰°
= √۳/۲

تو ۴ جم ا (۱/۴ جم^۲ ا − ۳/۴ جب^۲ ا) = ۴ جم ا {۱/۴ جم^۲ ا − ۳/۴ (۱ − جم^۲ ا)}

= ۴ جم ا (۱/۴ جم^۲ ا − ۳/۴ + ۳/۴ جم^۲ ا) = ۴ جم ا (جم^۲ ا − ۳/۴)

= ۴ جم^۳ ا − ۳ جم ا لیکن یہہ بموجب دفعہ ۸۰ = جم ۳ ا ٭

س ۲۱ جب ۳ ا جب^۳ ا + جم ۳ ا جم^۳ ا = جم^۳ ۲ ا جملہ اول بموجب دفعہ ۸۰

= (۳ جب ا − ۴ جب^۳ ا) جب^۳ ا + (۴ جم^۳ ا − ۳ جم ا) جم^۳ ا

= ۳ جب^۴ ا − ۳ جب^۶ ا − جب^۶ ا + ۳ جم^۶ ا + جم^۶ ا − ۳ جم^۴ ا

= ۳ جب^۴ ا − ۳ جب^۲ ا × جب^۴ ا − جب^۶ ا + ۳ جم^۲ ا × جم^۴ ا + جم^۶ ا − ۳ جم^۴ ا

= ۳ جب ۱ - ۴ جب^۳ ۱ (۱ - جم^۲ ۱) - جب^۶ ۱ + ۳ جم ۱ (۱ - جب^۲ ۱) + جم^۳ ۱ - ۳ جم ۱

= ۳ جب ۱ - ۴ جب^۳ ۱ + ۴ جب^۳ ۱ جم^۲ ۱ - جب^۶ ۱ + ۳ جم ۱ - ۳ جم ۱ جب^۲ ۱ +

جم^۳ ۱ - ۳ جم ۱ +

= جم^۳ ۱ - ۳ جم^۲ ۱ جب ۱ + ۳ جب^۲ ۱ جم ۱ - جب^۳ ۱ +

= (جم ۱ - جب ۱)^۳ یہ بموجب دفعہ ۱، = جم^۳ ۱ یہی مطلوب تہا +

س ۲۲ = جم^۳ ۱ جب^۳ ۱ + جب^۳ ۱ جم^۳ ۱ / ۴ = جب ۴ ۱ / ۴ بموجب دفعہ ۰ جملہ اولی

جم^۳ ۱ (۳ جب ۱ - ۴ جب^۳ ۱) + جب^۳ ۱ (۴ جم^۳ ۱ - ۳ جم ۱) / ۴

= ۳ جم^۳ ۱ جب ۱ - ۴ جم^۳ ۱ جب^۳ ۱ + ۴ جب^۳ ۱ جم^۳ ۱ - ۳ جب^۳ ۱ جم ۱ / ۴

= ۳ (جم^۳ ۱ جب ۱ - جب^۳ ۱ جم ۱) / ۴ = جم^۳ ۱ جب ۱ - جب^۳ ۱ جم ۱

اس کو ۴ سے ضرب کیا تو = ۴ جم^۳ ۱ جب ۱ - ۴ جب^۳ ۱ جم ۱ / ۴ =

۴ جب ۱ جم ۱ (جم^۲ ۱ - جب^۲ ۱) = ۲ × ۲ جب ۱ جم ۱ جم ۲ ۱ = ۲ جب ۲ ۱ جم ۲ ۱

= جب ۴ ۱ / ۴ اور یہی مطلوب تہا +

س ۲۳ جم ن ۱ جم (ن + ۲) ۱ - جم^۲ (ن + ۱) ۱ + جب^۲ ۱ = ۰ جملہ اولی

= جم ن ۱ (جم ن ۱ جم ۲ ۱ - جب ن ۱ جب ۲ ۱) - (جم ن ۱ جم ۱ - جب ن ۱ جب ۱)^۲ + جب^۲ ۱

= جم^۲ ن ۱ جم ۲ ۱ - جب ن ۱ جم ن ۱ جب ۲ ۱ لیکن جم ۲ ۱ = جم^۲ ۱ - جب^۲ ۱

بموجب دفعہ ۱ + اور جب ۲ ۱ = ۲ جب ۱ جم ۱ +

∴ پہلی رقم = جم^۲ ن ۱ جم^۲ ۱ - جم^۲ ن ۱ جب^۲ ۱ - ۲ جب ۱ جم ۱ جب ن ۱ جم ن ۱

اور دوسری رقم = – جم^٢ن ا جم^٢ ا – جب^٢ن ا جب^٢ ا + ٢ جم ن ا جم ا جب ن ا جب ا + جب^٢ ا جب^٢ ا – (١ – جب^٢ ن ا) جب^٢ ا – جب^٢ ن ا جب^٢ ا = یعنی جب^٢ ا جب^٢ ا + جب^٢ ن ا جب^٢ ا – جب^٢ ن ا جب^٢ ا =

یہی مطلوب تھا ❊

س ٢٤ $\frac{\text{جب ا ± جب ن ا + جب (٢ ن – ١) ا}}{\text{جم ا ± جم ن ا + جم (٢ ن – ١) ا}}$ = مس ن ا جم ا جب

دفعہ ٢ ء کے رقم اول و سیوم کو جمع کیا ❊

$$= \frac{\text{٢ جب } \frac{\text{١ + ١ (٢ ن – ١)}}{٢} \text{ جم } \frac{\text{١ – ١ (٢ ن – ١)}}{٢} \text{ ± جب ن ا}}{\text{٢ جم } \frac{\text{١ + ١ (٢ ن – ١)}}{٢} \text{ جم } \frac{\text{١ – ١ (٢ ن – ١)}}{٢} \text{ ± جم ن ا}}$$

$$\frac{\text{٢ جب ن ا جم (ن – ١) ا ± جب ن ا}}{\text{٢ جم ن ا جم (ن – ١) ا ± جم ن ا}} = \frac{\text{جب ن ا \{ جم (ن – ١) ا ± ١ \}}}{\text{جم ن ا \{ جم (ن – ١) ا ± ١ \}}}$$

= مس ن ا ❊

س ٢٥ جب ن ا مس^٢ ا قع ا – جم ن ا قع^٢ ا مس ا = ٤ جب (ن – ١) ا مس^٢ ٢ ا

$= \frac{\text{جب ن ا}}{\text{جب}^٢ \text{ ا . جم ا}} – \frac{\text{جم ن ا}}{\text{جم}^٢ \text{ ا جب ا}}$ اخراج کسر سے

=

$\frac{\text{جب ن ا . جم}^٢ \text{ ا جب ا – جم ن ا جب}^٢ \text{ ا . جم ا}}{\text{جب}^٢ \text{ ا جم}^٢ \text{ ا جب ا . جم ا}}$

$\frac{\text{جم ا جب ا (جب ن ا . جم ا – جم ن ا جب ا)}}{\text{جم ا جب ا (جب}^٢ \text{ ا جم}^٢ \text{ ا)}}$ شمار کنندہ اور نسب نما

دونوںکو ٤ مین ضرب کیا ❊

= ۴ جب (ن - ۱) ۱ / ۴ جب۲ ۱ جم۲ ۱ لیکن نسب نما = ۴ جب۲ ۱ جم۲ ۱

= (۲ جب ۱ جم ۱)۲ بموجب دفعہ ۷

= (جب ۲ ۱)۲ = جب۲ ۲ ۱

∴ ۴ جب (ن - ۱) ۱ × ۱ / جب۲ ۲ ۱

= ۴ جب (ن - ۱) ۱ مق۲ ۲ ۱

س ۲۶ جم ۱۰ ۱ + جم ۸ ۱ + ۳ جم ۴ ۱ + ۳ جم ۲ ۱ = ۸ جم ۱ جم۳ ۳ ۱

بموجب دفعہ ۲، جملہ اولے =

۲ جم ۹ ۱ جم ۱ + ۲ جم ۳ ۱ جم ۱ = ۲ جم ۱ (جم ۹ ۱ + ۳ جم ۳ ۱)

= ۲ جم ۱ (جم ۹ ۱ + جم ۳ ۱ + ۲ جم ۳ ۱)

= ۲ جم ۱ (۲ جم ۶ ۱ جم ۳ ۱ + ۲ جم ۳ ۱) دفعہ ۲ سے

= ۲ جم ۱ × ۲ جم ۳ ۱ (جم ۶ ۱ + ۱) لیکن بموجب دفعہ ۷ کے

= ۴ جم ۱ × جم ۳ ۱ (۲ جم۲ ۳ ۱)

= ۸ جم ۱ جم۳ ۳ ۱ ❊

س ۲۷ مم ۱ + مم ۲ ۱ + مم ۴ ۱ = مق ۴ ۱ (۲ + ۲ جم ۲ ۱ + ۳ جم ۴ ۱)

جملہ اولے ❊

= جم ۱ / جب ۱ + جم ۲ ۱ / جب ۲ ۱ + جم ۴ ۱ / جب ۴ ۱ لیکن جب ۴ ۱

= ۲ جب ۲ ۱ جم ۲ ۱ اور یہہ مساوی ہے ❊

= ۴ جب ۱ جم ۱ جم ۲۱ +

اسلیئے ذو اضعاف اقل سب کا یہی ہوا +

$$\frac{۴\text{ جم}^۳ ۱ \text{ جم } ۲۱ + ۲\text{ جم}^۲ ۲۱ + \text{جم } ۴۱}{\text{جب } ۴۱} = \frac{۲\text{ جم } ۲۱ (۲\text{ جم}^۲ ۱ + \text{جم } ۲۱) + \text{جم } ۴۱}{\text{جب } ۴۱}$$

ایک کو ثبت و منفی کیا تو $\frac{۲\text{ جم } ۲۱ (۲\text{ جم}^۲ ۱ - ۱ + ۱ + \text{جم } ۲۱) + \text{جم } ۴۱}{\text{جب } ۴۱}$

$$\frac{۲\text{ جم } ۲۱ (\text{جم } ۲۱ + ۱ + \text{جم } ۲۱)}{\text{جب } ۴۱} = \frac{۲\text{ جم}^۲ ۲۱ + ۲\text{ جم } ۲۱ + ۲\text{ جم}^۲ ۲۱ + \text{جم } ۴۱}{\text{جب } ۴۱}$$

۱ کو ثبت و منفی کیا تو اور (۲ جم^۲ ۲۱ − ۱) = جم ۴۱

$$= \frac{۲ + ۲\text{ جم}^۲ ۲۱ - ۱ + ۲\text{ جم } ۲۱ + ۲\text{ جم}^۲ ۲۱ - ۱ + \text{جم } ۴۱}{\text{جب } ۴۱}$$

$$\frac{(۲ + ۲\text{ جم } ۲۱ + ۳\text{ جم } ۴۱)}{\text{جب } ۴۱} = \frac{۱}{\text{جب } ۴۱}(۲ + ۲\text{ جم } ۲۱ + ۳\text{ جم } ۴۱)$$

= مق ۱ (۲ + ۲ جم ۲۱ + ۳ جم ۴۱)

مق ۱ = $\frac{۲\text{ جب } ۲۱ + ۲\text{ جب } ۳۱}{\text{جم } ۱ - \text{جب } ۱ + \text{جم } ۳۱ + \text{جب } ۳۱}$ جملۂ ثانی کا لنسب نما بوجب فقرہ مش ۲۸

= جم ۱ − جب ۱ − (۴ جم^۳ ۱ − ۳ جم ۱) + ۳ جب ۱ − ۴ جب^۳ ۱ =

(۴ جم ۱ + ۲ جب ۱ − ۴ جم^۳ ۱ − ۴ جب^۳ ۱) لیکن − ۴ جم^۳ ۱ = − جم ۱ + ۴ جم

۴ جم ۱ (۱ − جب^۲ ۱) − =

∴ ۴ جم ۱ + ۲ جب ۱ − ۴ جم ۱ + ۴ جم ۱ جب^۲ ۱ − ۴ جب^۳ ۱

= ۲ جب ۱ (۱ + ۲ جم ۱ جب ۱ − ۲ جب^۲ ۱) لیکن ۲ جم ۱ جب ۱ = جب ۲۱

اور ۱ − ۲ جب^۲ ۱

= جم ۲۱ ∴ جملہ بالا =

= ۲ جب ا (جب^2 ا + جم ۲ ا) = جب ا (۲ جب ۲ ا + ۲ جم ۲ ا)

∴ ا(۲ جب ۲ ا + ۲ جم ۲ ا) ÷ جب ا (۲ جب ۲ ا + ۲ جم ۲ ا) = ۱ ÷ جب ا = مق ا

س ۲۹ جم^2 ۲ ا = (جم ا − جب ۳ ا)^2 + ۲ جم ا جب ۳ ا (جم ا − جب ا)^2

جملۂ ثانی = جم^2 ا + جب^2 ۳ ا − ۲ جم ا جب ۳ ا + ۲ جم ا جب ۳ ا

− ۴ جم^2 ا (جب ۳ ا جب ا)

= جم^2 ا + جب ۳ ا (جب ۳ ا − ۴ جم^2 ا جب ا)

= جم^2 ا + جب ۳ ا (۳ جب ا − ۴ جب^3 ا − ۴ جم^2 ا جب ا) بموجب

دفعہ ∴ ۴

= جم^2 ا + جب ۳ ا جب ا {۳ − ۴ (جب^2 ا + جم^2 ا)}

= جم^2 ا + (جب ۳ ا جب ا) × −۱ = جم^2 ا − جب ۳ ا جب ا

= جم^2 ا − جب ا (۳ جب ا − ۴ جب^3 ا)

= جم^2 ا − جب^2 ا (۳ − ۴ جب^2 ا) اسمین جب^2 ا کو منفی اور مثبت کیا

= جم^2 ا − جب^2 ا + جب^2 ا − جب^2 ا (۳ − ۴ جب^2 ا)

= جم^2 ا − جب^2 ا + جب^2 ا − ۳ جب^2 ا + ۴ جب^4 ا

= جم ۲ ا − ۲ جب^2 ا (۱ − ۲ جب^2 ا) بموجب دفعہ ۱۰

= جم ۲ ا − (۱ − جم ۲ ا) جم ۲ ا

= جم ۲ ا − جم ۲ ا + جم^2 ۲ ا = جم^2 ۲ ا

یہی مطلوب تھا

س ٣٣ جم^{٦} ١ - جب^{٦} ١ = جم ٢ ١ (١ - $\frac{١}{٤}$ جب^{٢} ٢ ١) جملہ اوسے

= (جم^{٢} ١ - جب^{٢} ١) (جم^{٤} ١ + جم^{٢} ١ جب^{٢} ١ + جب^{٤} ١) =

= جم ٢ ١ {جم^{٤} ١ + (١ - جب^{٢} ١) جب^{٢} ١ + جب^{٤} ١}

= جم ٢ ١ (جم^{٤} ١ + جب^{٢} ١) = جم ٢ ١ (جم^{٢} ١ × جم^{٢} ١ + جب^{٢} ١)

= جم ٢ ١ {(١ - جب^{٢} ١) جم^{٢} ١ + جب^{٢} ١}

= جم ٢ ١ (جم^{٢} ١ + جب^{٢} ١ - جب^{٢} ١ جم^{٢} ١) ٭

= جم ٢ ١ (١ - جب^{٢} ١ جم^{٢} ١) لیکن جب^{٢} ١ جم^{٢} ١ کو $\frac{٤}{٤}$ سے ضرب کیا تو

تو جم ٢ ١ (١ - $\frac{٤ \text{ جب}^{٢} ١ \text{ جم}^{٢} ١}{٤}$) = جم ٢ ١ (١ - $\frac{\text{جب}^{٢} ٢ ١}{٤}$)

= جم ٢ ١ (١ - $\frac{١}{٤}$ جب^{٢} ٢ ١)

مساوات ہای ذیل کو حل کرو

س ۱۱ | مس$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ + مم$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ = ۴ = $\frac{\text{جب}(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\text{جم}(\frac{\pi}{4}-\theta)}+\frac{\text{جم}(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\text{جب}(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

= ۴ اخراج کسر سے جب$^2(\frac{\pi}{4}-\theta)$ + جم$^2(\frac{\pi}{4}-\theta)$ =

۴ جب$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ جم$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ اسلئے ۱ = ۲ جب$(\frac{\pi}{2}-2\theta)$ =

۲ جم ۲θ ∴ جم ۲θ = $\frac{1}{2}$ ∴ ۲θ = ۲ ن$\pi \mp \frac{\pi}{3}$ ∴ θ = ن$\pi \mp \frac{\pi}{6}$

بطرز دیگر | مس$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ + مم$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ = ۴ بموجب دفعہ ۴۶

$\frac{\text{۱ − مس ا}}{\text{۱ + مس ا}}+\frac{\text{۱ + مس ا}}{\text{۱ − مس ا}}$ = ۴ یعنی $\frac{(\text{۱ − مس ا})^2+(\text{۱ + مس ا})^2}{(\text{۱ − مس ا})(\text{۱ + مس ا})}$

= ۴

∴ $\frac{\text{۲ + ۲ مس}^2\text{ ا}}{\text{۱ − مس}^2\text{ ا}}$ = ۴ طرفین مساوات کو ۲ پر تقسیم کیا تو

$\frac{\text{۱ + مس}^2\text{ ا}}{\text{۱ − مس}^2\text{ ا}}$ = ۲ یعنی مس^2 ا = $\frac{1}{3}$ ∴ مس ا = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ جب ا = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = ۳۰°

∴ جب ا = $\frac{1}{2}$ لیکن جب ۳۰° = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = ۳۰° اور عام صورت

θ کی یہہ ہے نπ + $\frac{\pi}{6}$ = جواب ہے +

س ۱۲ | جب ۴θ + جب θ = ۰ بموجب دفعہ ۲۶ = ۲ جب $\frac{5\theta}{2}$ جم

$\frac{3\theta}{2}$ = ۰ پس جب $\frac{5\theta}{2}$ جم $\frac{3\theta}{2}$ = ۰ ∴ جب $\frac{5\theta}{2}$

= ۰ یا جم $\frac{3\theta}{2}$ = ۰

∴ لیکن جب ۰° = ۰ پس $\frac{5\theta}{2}$ = ۰ اور جم ۹۰° = ۰ پس $\frac{3\theta}{2}$ =

$\frac{\pi}{2}$ عام صورت یہہ ہوگی $\frac{5\theta}{2}$ = نπ اور $\frac{3\theta}{2}$ =

(۲ن ∓ $\frac{1}{2}$)π = جواب +

س ۳۳ جب ۷θ − جب θ = جب ۳θ یعنے ۲ جم ۴θ جب ۳θ − جب ۳θ = ۰

∴ جب ۳θ (۲ جم ۴θ − ۱) = ۰ پس جب ۳θ = ۰ یا ۲ جم ۴θ = ۱

یعنے جم ۴θ = $\frac{1}{2}$ لیکن جب ۰° = ۰ اور جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ پس ۳θ =

= ن π اور ۴θ = ۶۰° = ۲ن π ∓ $\frac{\pi}{3}$

س ۳۴ جب θ + جم θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ طرفین مساوات مین $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو ضرب دے

∴ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جم θ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب θ = $\frac{1}{2}$ لیکن جم $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور جب

∴ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{\pi}{4}$

جم $\frac{\pi}{4}$ جم θ + جب $\frac{\pi}{4}$ جب θ = $\frac{1}{2}$ یعنے جم(θ − $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{2}$

لیکن جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ ∴ (θ − $\frac{\pi}{4}$) = ۶۰° = ۲ ن π ∓ $\frac{\pi}{3}$ = جواب کے

س ۳۵ جب ۵θ = ۱۶ جب^{5} θ یعنے جب (۳θ + ۲θ) = ۱۶ جب^{5} θ

یا جب ۳θ جم ۲θ + جم ۳θ جب ۲θ = ۱۶ جب^{5} θ

= (۱ − ۲ جب^{2} θ) (۳ جب θ − ۴ جب^{3} θ) + ۲ جب θ جم θ (۴ جم^{3}

θ − ۳ جم θ) = ۱۶ جب^{5} θ

= ۳ جب θ − ۱۰ جب^{3} θ + ۸ جب^{5} θ + ۲ جب θ (۱ − جب^{2} θ)

(۱ − ۴ جب^{2} θ) = ۱۶ جب^{5} θ =

۵ جب θ − ۲۰ جب^{3} θ + ۱۶ جب^{5} θ = ۱۶ جب^{5} θ یعنے ۵ جب θ − ۲۰ جب^{3}

= ۰ یعنی ۵ جب θ (۱ − ۴ جب² θ) = ۰ یعنی ۵ جب θ = ۰ یا

جب θ = ۰ اور

۱ − ۴ جب² θ = ۰ ∴ جب θ = $\frac{1}{2}$ لیکن جب ۰° = ۰ پس θ = ۰

اور جب ۳۰° = $\frac{1}{2}$ پس θ = ۳۰° عام صورت مین بیان کیا تو

θ = ن π ± $\frac{\pi}{6}$ ∴

س ۳۶ جم ۳θ + جم ۲θ + جم θ = ۰ یعنی ۲ جم ۲θ جم θ + جم ۲θ = ۰

پس جم ۲θ (۲ جم θ + ۱) = ۰ یعنی جم ۲θ = ۰ اور ۲ جم θ + ۱ = ۰

یا جم θ = − $\frac{1}{2}$ چونکہ جم ۹۰° = ۰ پس ۲θ = ۹۰° اور جم ۱۲۰° = − $\frac{1}{2}$

پس θ = ۱۲۰° عام صورت یہہ ہی ۲θ = ن π + $\frac{\pi}{2}$ اور θ =

۲ ن π ± $\frac{2\pi}{3}$ ∴

س ۳۷ جب ۳θ + جب ۲θ + جب θ = ۰ یعنی ۲ جب ۲θ جم θ + جب ۲θ = ۰

پس جب ۲θ (۲ جم θ + ۱) = ۰ یعنی جب ۲θ = ۰ اور ۲ جم θ + ۱ = ۰

∴ جم θ = − $\frac{1}{2}$ لیکن جب ۰° = ۰ پس ۲θ = ۰ اور جم ۱۲۰° = − $\frac{1}{2}$

∴ θ = ۱۲۰° عام صورت یہہ ہے ۲θ = ن π اور θ = ۲ ن π

± $\frac{2\pi}{3}$ ∴

س ۳۸ مس θ + مس (θ + $\frac{\pi}{4}$) = ۲

مس θ + $\frac{\text{۱ + مس θ}}{\text{۱ − مس θ}}$ = $\frac{\text{جب θ}}{\text{جم θ}}$ + $\frac{\text{۱ + جب θ / جم θ}}{\text{۱ − جب θ / جم θ}}$ = ۲

یعنے $\frac{جب\ \theta}{جم\ \theta} + \frac{جم\ \theta + جب\ \theta}{جم\ \theta - جب\ \theta} = ۲$

= جب θ جم θ - جب² θ + جم² θ + جب θ جم θ = ۲ جم² θ - ۲ جب θ جم θ

یعنے = جم² θ - جب² θ - ۴ جب θ جم θ پس جم θ

یا ۲ جب ۲θ - ۱ = (جب² θ + جم² θ) - ۲ جب ۲θ = ۰

پس جب ۲θ = ½ لیکن جب ۳۰° = ½ پس ۲θ = ۳۰° =

ن π + (-۱)ⁿ π/۶ ∴

س ۳۹ مس ۲θ = ۸ جم² θ - مم θ

یعنے $\frac{جب\ ۲\theta}{جم\ ۲\theta} = ۸\ جم^2\theta - \frac{جم\ \theta}{جب\ \theta}$

پس $\frac{۲\ جب\ \theta\ جم\ \theta}{جم\ ۲\theta} + \frac{جم\ \theta}{جب\ \theta} - ۸\ جم^2\theta = ۰$

= جم θ $\left\{\frac{۲\ جب^2\theta + جم\ ۲\theta - ۸\ جم\ \theta\ جب\ \theta\ جم\ ۲\theta}{جم\ ۲\theta\ جب\ \theta}\right\} = ۰$

∴ جم θ = ۰ یا ۲ جب² θ + جم ۲θ - ۸ جم θ جب θ جم ۲θ = ۰

یا ۲ جب² θ + ۱ - ۲ جب² θ - ۴ جب ۲θ جم ۲θ = ۰

یا ۱ - ۲ جب ۴θ = ۰ یا جب ۴θ = ½ لیکن جم ۹۰° = ۰

پس θ = ۹۰° = ن π + π/۲ اور جب ۳۰° = ½ پس ۴θ = ۳۰

= ن π + (-۱)ⁿ π/۲۴ = جواب کے

س ۴۰ مس (π/۴ + θ) = ۳ مس (π/۴ - θ)

$\frac{۱ + مس\ \theta}{۱ - مس\ \theta} = \frac{۳\ (۱ - مس\ \theta)}{۱ + مس\ \theta}$ اخراج کسر سے

(۱ + مس ا)^۲ = ۳ (۱ − مس ا)^۲ یا {(۱ + مس ا) / (۱ − مس ا)}^۲ = ۳

طرفین کا جذر لیا ۔

(۱ + مس ا) / (۱ − مس ا) = ± √۳ یعنے مس (π/۴ + ا) = √۳

لیکن مس ۶۰° = √۳

∴ (π/۴ + ا) = ۶۰° = نπ ± π/۳ = جواب ہے ۔

حل سوالات نمبر (۷)

س ۱ بیان کرو کہ جب ا/۲ = −√(۱ + جب ا) − √(۱ − جب ا) جبکہ ا واقع ہو

درمیان ۴۵۰° اور ۶۳۰° کے

پس ظاہر ہے کہ ا/۲ واقع ہوگا مابین ۲۲۵° اور ۳۱۵° کی اور جو زاویہ

درمیان ۲۲۵° اور ۳۱۵° کی واقع ہو اوسکی جب مقدار منفی ہوگی اور

عدداً بڑی بھی جم سے ہوگی ۔

جب ا/۲ + جم ا/۲ = √(۱ + جب ا) . . . . (۱)

جب ا/۲ − جم ا/۲ = √(۱ − جب ا) . . . . (۲)

مساوات (۱) مین بائیان رکن مقدار منفی ہوگا اور نیز مساوات

نمبر (۲) مین بھی بائیان رکن مقدار منفی ہوگا ∴ دونوں کا جمع کرنے سے

۲ جب ا/۲ = −√(۱ + جب ا) − √(۱ − جب ا) ۔

س ۲ بموجب دفعہ ۷۸ جب ½ + جم ½ = √‾‾(۱+جب ۱) . . . . . (۱)

جب ½ - جم ½ = √‾‾(۱-جب ۱) . . . . (۲)

ظاہر ہے کہ جب زاویہ ½ واقع ہو درمیان ۴۵° اور ۱۳۵° کے تواوسکی جب کے مقدار مثبت ہو گی اور بڑہی بہی ہو گی جم سے پس اسوقت مین بائیان رکن مساوات (۱) و (۲) کا مقدار مثبت ہوگا دونون مساواتونکو تفریق کرنے سے مساوات ذیل حاصل ہوگی

۲ جم ½ = √‾‾(۱+جب ۱) - √‾‾(۱-جب ۱)

س ۳ موافق دفعہ ۷۸ جب ½ + جم ½ = √‾‾(۱+جب ۱) . . . . . (۱)

جب ½ - جم ½ = √‾‾(۱-جب ۱) . . . . . . (۲)

جبکہ ½ واقع ہے درمیان - ۴۵° اور - ۱۳۵° تو جب اوسکی ہمیشہ مقدار منفی ہو گی اور عدداً کلان ہو گی جم سے پس اسحالت مین بائیان رکن (۱) و (۲) کا مقدار منفی ہوگا دونو کو جمع کرنے سی یہہ مساوات حاصل ہوگی جب ½ = √‾‾(۱+جب ۱) - √‾‾(۱-جب ۱)

س ۴ ایسے دو حدود بتلاؤ جنکی اندر ۱ واقع جبکہ ۲ جب ۱ = √‾‾(۱+جب ۲۱) + √‾‾(۱-جب ۲۱) حسب دفعہ (۷۸) جب ۱ + جم ۱ = √‾‾(۱+جب ۲۱) . . . . (۱)

جب ۱ - جم ۱ = √‾‾(۱-جب ۲۱) . . . . (۲)

یہہ ظاہر ہے کہ مساوات (۱) و (۲) کو جمع کرنے سے مساوات

معلوم ہو اوس صورت مین حاصل ہوگی جبکہ مساوات (١) کا بائیان رکن مقدار منفی ہو اور (٢) کا بائیان رکن مثبت اور یہہ صورت اوس وقت واقعہ ہوتی ہے جبکہ جم ا مقدار منفی ہو اور بڑے ہو جب ا سے اور یہہ اوسوقت مین ہوتی ہے جبکہ ا واقعہ درمیان ١٣٥° اور ٢٢٥° کے ہو اور عام صورت اسکی یہہ ہوگی

$$2 ن \pi + \frac{3\pi}{4} \text{ اور } 2 ن \pi + \frac{5\pi}{4}$$

س ۵ بتلاؤ کہ ا کن حدون مین واقع ہے جبکہ ٢ جم ا $= -\sqrt{1 + \text{جب } 2ا} + \sqrt{1 - \text{جب } 2ا}$

یہہ ظاہر ہے کہ (۴) سوال مین مساوات اول کو مساوات (٢) سے تفریق کرنے سے یہہ مساوات اوسوقت حاصل ہوتی ہے جبکہ مساوات (١) کا بائیان رکن مقدار منفی اور یہہ صورت اوس حالت مین واقعہ ہوتی ہے جبکہ جب ا مقدار منفی ہو اور بڑے ہو جم ا سے اور یہہ صورت اوسوقت مین ہوتی ہے جبکہ ا واقعہ درمیان ٢٢٥° اور ٣١٥° کی ہو ∴ عام صورت یہہ ہوگی

$$2 ن \pi + \frac{5\pi}{4} \text{ اور } 2 ن \pi + \frac{7\pi}{4}$$

س ٦ بتلاؤ کہ ا کن حدود مین واقعہ ہو کہ ٢ جب ا $= \sqrt{1 + \text{جب } 2ا} - \sqrt{1 - \text{جب } 2ا}$

بموجب قاعدہ بالا کے یہہ دو مساواتین حاصل ہوتے ہین +

جب ا + جم ا = ما ۱ + جب ۲ ا ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ (۱)

جب ا − جم ا = − ما − جب ۲ ا ۰ ۰ ۰ ۰ ۰ (۲)

اساوات اول سے ظاہر ہوتا ہے کہ ا درمیان ۲ ن π − π/۴ اور ۲ ن π + ۳π/۴ کی واقع ہو – اور دوسرے مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ ا درمیان ۲ م π + ۵π/۴ اور ۲ م π + ۹π/۴ کی واقع ہو جو کہ مساوی ۲ (م + ۱) π − ۳π/۴ اور ۲ (م + ۱) π + π/۴ کی ہے اسلئے نتایج بالا سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ا ضرور واقع ہونا چاہئے درمیان ۲ ن π − π/۴ اور ۲ ن π + π/۴ کے +

عش فرض کرو کہ زاویہ معلوم ا اور نسبت مفروض م ہے لا اگر ایک حصہ کو تعبیر کرے تو ا − لا دوسرے حصہ کو تعبیر کریگا اسلئے جب لا = م جب (ا − لا) +

اسیطرح جب لا = م (جب ا جم لا − جم ا جب لا) تقسیم کرو جم لا سے تو اس سے مس لا = م (جب ا − جم ا مس لا) اسلئے مس لا = م جب ا / (۱ + م جم ا)

پس جبکہ مس لا دریافت ہوگیا ہے تو اسیطرح پھر لا بھی معلوم ہو سکتا ہے

ش فرض کرو کہ زاویہ معلوم ا ہے اور نسبت معلوم م : ۱ سے ہے اور لا اگر ایک حصہ زاویہ ا کا ہو تو ا − لا دوسرا حصہ ہوگا اسلئے جم لا = م جم

(ل-۱)

اسلیئے جم لا = م (جم ا جم لا + جب ا جب لا) تقسیم کرو جم لا سے تو اسلیئے

ا = م (جم ا + جب ا مس لا) اسلیئے مس لا = ا - م جم ا / م جب ا جس سے ظاہر ہو

کہ مس لا معلوم ہوا ہی اسطرح پر لا بھی معلوم ہو سکتا ہی ❊

س ۹ فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہی ایک زاویہ مفروضہ کو اور م ظاہر کرتا ہی

نسبت مفروضہ کو اگر لا زاویہ کی ایک حصہ کو تعبیر کرے تو ا - لا دوسرے

حصہ کو تعبیر کریگا اسیطرح پر مس لا = م (مس ا - مس لا) / ا + مس ا مس لا

اسیواسطے مس لا (ا + مس ا مس لا) = م (مس ا - مس لا) اسیطرح پر ہم

رکھتے ہیں ایک مساوات درجہ دوم کی جس سے قیمت مس لا کی دریافت

ہو سکتی ہی یا ہم اسطرح پر بھی معلوم کر سکتے ہیں ❊

مس لا = م مس (ا - لا) اسواسطے جب لا / جم لا = م جب (ا - لا) / جم (ا - لا) اسواسطے ۲ جب لا جم (ا - لا)

= ۲ م جب (ا - لا) جم لا ۔ اسواسطے جب ا + جب (۲ لا - ا) = م { جب ا + جب

(ا - ۲ لا) } اسواسطے = م { جب ا - جب (۲ لا - ا) } اسواسطے (م + ۱)

جب (۲ لا - ا) = (م - ۱) جب ا اسلیئے جب (۲ لا - ا) = م - ۱ / م + ۱ جب ا

پس جب (۲ لا - ا) معلوم ہو گیا ہو تو اسطرح پر ۲ لا - ا بھی معلوم ہو سکتا اور اسیواسطے لا بھی معلوم ہو سکتا ہے

س ۱۰ دریافت کرو قیمت جب ا کی جبکہ مس ا/۲ = ۲ - √۳ کر ہو چونکہ مم ا/۲ = ۲ + √۳

∴ مس ا/۲ + مم ا/۲ = (۲ - √۳ + ۲ + √۳) = ۴ لیکن مس ا/۲ + مم ا/۲ = ۲ / جب ا ∴

۲ / جب ا = ۴ ∴ جب ا = ۲ / ۴ یا جب ا = ۱/۲ = جواب کی ہے ❊

س ۱۱ دریافت کرو جم ۵°۱۰ کی جبکہ جب ۲۱۰° = $-\frac{۱}{۲}$ فرض کرو کہ ۲۱۰° = ۲ا تو ۱۰۵° = ا اگر ہونگے

چونکہ ۲ جم ا = $\sqrt{ا + جب ۲ا} - \sqrt{ا - جب ۲ا}$ بموجب دفعہ ۸۷

یعنے ۲ جم ا = $\sqrt{ا - \frac{۱}{۲}} - \sqrt{ا + \frac{۱}{۲}} = -\left(\frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۲}}\right)$ پس جم ا

= $-\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}$ = جواب کے ؛

س ۱۲ بتلایا گیا ہے مس ۲ا = $-\frac{۲۴}{۷}$ دریافت کرو قیمت جب ا اور جم ا

بموجب دفعہ ۹۱ مس ا = $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + (\frac{۲۴}{۷})^۲}}{-\frac{۲۴}{۷}} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + \frac{۵۷۶}{۴۹}}}{-\frac{۲۴}{۷}}$

= $\frac{-۱ \pm \sqrt{\frac{۶۲۵}{۴۹}}}{-\frac{۲۴}{۷}} = \frac{-۱ \pm \frac{۲۵}{۷}}{-\frac{۲۴}{۷}} = \frac{-۷ \pm ۲۵}{-۲۴} = \frac{۳۲}{۲۴}$

یا $-\frac{۱۸}{۲۴} = \frac{۴}{۳}$ یا $-\frac{۳}{۴}$ یعنے مس ا = $\frac{۴}{۳}$ یا $-\frac{۳}{۴}$ یعنے $\frac{عمود}{قاعدہ} = \frac{۴}{۳}$ یا

$-\frac{۳}{۴}$ پس عمود = ۴ یا −۳ اور قاعدہ = ۳ یا ۴ بحر دو صورت وتر = ±۵

پس جب ا = $\pm\frac{۴}{۵}$ یا $\pm\frac{۳}{۵}$ اور جم ا = $\pm\frac{۳}{۵}$ یا $\pm\frac{۴}{۵}$ ؛

س ۱۳ قیمت مس ۳۳۰° کی معلوم ہے تو مس ۱۶۵° کا دریافت کرو

مس ۳۳۰° = $\frac{جب ۳۳۰°}{جم ۳۳۰°} = \frac{جب(۳۶۰° - ۳۰°)}{جم(۳۶۰° - ۳۰°)}$

= $\frac{-جب ۳۰°}{جم ۳۰°} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = -\frac{۱}{۲} \div \frac{\sqrt{۳}}{۲} = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{\sqrt{۳}}$

= $-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ = مس ۳۳۰° ؛

= $\frac{جب ۳۰°}{جم ۳۰°} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{۲} \div \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{\sqrt{۳}}$ =

$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

∴ مس $\frac{۱}{۲}$ ا = $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + مس^۲ ا}}{مس ا}$ ∴ مس $\frac{۱}{۲}$ ... = $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + (\frac{۱}{\sqrt{۳}})^۲}}{-\frac{۱}{\sqrt{۳}}}$

بموجب دفعہ ۱۹۱ ؞

∴ مس ۱۰۵° = (۰ ± ۱ − √(۱ + ۱/۳)) / (۱/√۳) = (− ۱ ± ۲/√۳) / (۱/√۳) = (± ۲ − ۱/√۳) / (۱/√۳)

= √۳ ∓ ۲ لیکن مس ۱۰۵° کا ایک منفی قیمت ہونا ہے اسلئے = − √۳ − ۲

س ۱۴ مس² ۱/۲ = (۲جب ۱ − جب ۲۱) / (۲جب ۱ + جب ۲۱)

مس ۱/۲ = (۱ − جم ۱) / (۱ + جم ۱) بموجب دفعہ ۱۰ شمار کنندہ و نسب نما کو

جب ۱ سے ضرب دیا

∴ ۲جب ۱ (۱ − جم ۱) / ۲جب ۱ (۱ + جم ۱) = (۲جب ۱ − ۲جب ۱ جم ۱) / (۲جب ۱ + ۲جب ۱ جم ۱) = (۲جب ۱ − جب ۲۱) / (۲جب ۱ + جب ۲۱)

یا جملہ ثانی کو حل کرکے مساوی مس² ۱/۲ کی بنا دیا ؞

س ۱۵ جملۂ اولےٰ (۱ − ۱۸۰) جمق ½ (۱۸۰ + ۱) جمق ½ ۲ = (۱ − ۱۸۰) جمق

= ۱ − جم (۱۸۰ − ۱) بموجب دفعہ ۳۴ = ۱ + جم ۱ اور یہ بموجب دفعہ ۱۰

= ۲ جم² ½ = ۲ (۱ − جب² ½) بموجب دفعہ ۹ اور یہ = ۲ (۱ + جب ½) ×

(۱ − جب ½) لیکن (۱ + جب ½) = ۱ − جم (۹۰ + ½) اور

(۱ − جب ½) = ۱ − جم (۹۰ − ½) مگر ۱ − جم (۹۰ + ½) اور ۱ − جم

(۹۰ − ½) = جمق (۹۰ + ½) اور جمق (۹۰ − ½) اسلئے

۲ (۱ + جب ½) (۱ − جب ½) = ۲ جمق ½ (۱۸۰ + ۱) جمق ½ (۱۸۰ − ۱)

س ۱۶ (جم ۱ + جم ب)² + (جب ۱ + جب ب)² = ۴ جم² ½ (۱ − ب) بموجب

دفعہ ۲۷ = ۱

(۲ جم (ا+ب)/۲ جم (ا−ب)/۲)² + (۲ جب (ا+ب)/۲ جم (ا−ب)/۲)²

= ۴ جم² ((ا−ب)/۲) {جم² (ا+ب)/۲ + جب² (ا+ب)/۲} = ۴ جم² ½

(ا − ب) × ۱ = ۴ جم² ½ (ا − ب)

س ۱۷ (جم ا − جم ب)² + (جب ا − جب ب)² = ۴ جب² ½ (ا − ب) بموجب دفعہ ۲

(۲ جب (ا+ب)/۲ جب (ا−ب)/۲)² + (۲ جم (ا+ب)/۲ جب (ا−ب)/۲)²

(۴ جب² (ا+ب)/۲ جب² (ا−ب)/۲) + (۴ جم² (ا+ب)/۲ جب² (ا−ب)/۲)

= ۴ جب² (ا−ب)/۲ {جب² (ا+ب)/۲ + جم² (ا+ب)/۲}

= ۴ جب² ½ (ا − ب) × ۱ = ۴ جب² ½ (ا − ب) یہی ثابت کرنا تھا

س ۱۸ جب ۲۲½ = √(۲−√۲)/۲ اور جم ۲۲½ = √(۲+√۲)/۲ اور مس ۲۲½

= √۲ − ۱ چونکہ بموجب دفعہ ۴۸ جب ½ ا = √((۱−جم ا)/۲)

∴ جب ۲۲½ = √((۱−جم ۴۵)/۲) = √((۱ − ۱/√۲)/۲) = √((√۲−۱)/(۲√۲))

= √((√۲−۱)/(۲√۲)) اسکی نسب نما اور شمار کنندہ کو √۲ مین ضرب دیا

تو = √(۲−√۲)/۲ اور چونکہ جم ½ ا = √((۱+جم ا)/۲)

∴ جم ۲۲½ = √((۱+جم ۴۵)/۲) = √((√۲+۱)/(۲√۲)) اسکو بہی √۲

مین ضرب دیا تو = √(۲+√۲)/۲ چونکہ بموجب دفعہ ۱۹ مس ½ ا

= (−۱ ± √(۱+مس² ا))/مس ا جسمین س = مس ا ∴ مس ۲۲½ =

(−۱ ± √(۱+مس² ۴۵))/مس ۴۵ لیکن مس ۴۵ = ۱ (۱) اسلئے =

-۱ ± √(۱ + (۱)²) / ۱ = -۱ ± √۲ / ۱ = √۲ - ۱ / ۱ = √۲ - ۱ ؛

س ۱۹ (مس ۱ + مم ۱) ۲ مس ½ (۱ - مس² ½) = (۱ + مس² ½)²

بموجب دفعہ ۱۹ و ۴۴ ،

{ ۲ مس ½ / (۱ - مس² ½) + (۱ - مس² ½) / (۲ مس ½) } ۲ مس ½ (۱ - مس² ½)

= (۴ مس² ½ + (۱ - مس² ½)²) / (۲ مس ½ (۱ - مس² ½)) × (۲ مس ½ - ۲ مس³ ½) / ۱

= ۴ مس² ½ + ۱ + مس⁴ ½ - ۲ مس² ½

= ۱ + مس⁴ ½ + ۲ مس² ½ = (۱ + مس² ½)² فھی المطلوب

س ۲۰ مس² (π/۴ + ½) = (قع ۱ + مس ۱) / (قع ۱ - مس ۱) چونکہ بموجب دفعہ ۴۴ ،

مس (۴۵ + ۱) = (۱ + مس ۱) / (۱ - مس ۱)

∴ مس² (π/۴ + ½) = (۱ + مس ½)² / (۱ - مس ½)²

= (۱ + ۲ مس ½ + مس² ½) / (۱ - ۲ مس ½ + مس² ½) = (۱ + ۲ جب ½ / جم ½ + جب² ½ / جم² ½) / (۱ - ۲ جب ½ / جم ½ + جب² ½ / جم² ½)

= (جم² ½ + ۲ جب ½ جم ½ + جب² ½) / (جم² ½ - ۲ جب ½ جم ½ + جب² ½) = (۱ + ۲ جب ½ جم ½) / (۱ - ۲ جب ½ جم ½)

= (۱ + جب ۱) / (۱ - جب ۱) تقسیم کیا کسر اور مخرج کو جم ۱ پر تو

((۱ + جب ۱) / جم ۱) / ((۱ - جب ۱) / جم ۱) = (۱ / جم ۱ + جب ۱ / جم ۱) / (۱ / جم ۱ - جب ۱ / جم ۱) =

س ۲۱ $\frac{\text{قع } 1 + \text{مس } 1}{\text{قع } 1 - \text{مس } 1}$

$\text{جب}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \text{جم}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{جب } \theta}{\sqrt{\text{جمق } \theta}}$

$= \text{جب } 45\ \text{جم}\frac{\theta}{2} - \text{جم } 45\ \text{جب}\frac{\theta}{2}$

$+ \text{جم } 45\ \text{جم}\frac{\theta}{2} + \text{جب } 45\ \text{جب}\frac{\theta}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{جم}\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{جب}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{جم}\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{جب}\frac{\theta}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2\,\text{جم}\frac{\theta}{2} =$

$= \frac{2\,\text{جم}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}}$ کسر اور مخرج کو $\text{جب}\frac{\theta}{2}$ سے ضرب کیا تو

$= \frac{2\,\text{جم}\frac{\theta}{2}\,\text{جب}\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}\,\text{جب}\frac{\theta}{2}} = \frac{\text{جب } \theta}{\sqrt{2\,\text{جب}^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\text{جب } \theta}{\sqrt{1 - \text{جم } \theta}} =$

$\frac{\text{جب } \theta}{\sqrt{\text{جمق } \theta}}$

س ۲۲ $4\,\text{جب}^2\frac{\theta}{4}\left(1 - \text{جب}\frac{\theta}{2}\right)$

$= 4\,\text{جب}^2\frac{\theta}{4}\left(\text{جب}^2\frac{\theta}{4} + \text{جم}^2\frac{\theta}{4} - 2\,\text{جب}\frac{\theta}{4}\,\text{جم}\frac{\theta}{4}\right)$

$= 4\,\text{جب}^2\frac{\theta}{4}\left(\text{جب}\frac{\theta}{4} - \text{جم}\frac{\theta}{4}\right)^2$

$= \left(2\,\text{جب}^2\frac{\theta}{4} - 2\,\text{جب}\frac{\theta}{4}\,\text{جم}\frac{\theta}{4}\right)^2$

$= \left(1 - \text{جم}\frac{\theta}{2} - \text{جب}\frac{\theta}{2}\right)^2$

اور $\sqrt{1 + \text{جب } \theta} = \sqrt{\text{جب}^2\frac{\theta}{2} + \text{جم}^2\frac{\theta}{2} + 2\,\text{جب}\frac{\theta}{2}\,\text{جم}\frac{\theta}{2}}$

$= \text{جب}\frac{\theta}{2} + \text{جم}\frac{\theta}{2}$

اسلئے $\left\{1 - \sqrt{1 + \text{جب } \theta}\right\}^2 = \left(1 - \text{جب}\frac{\theta}{2} - \text{جم}\frac{\theta}{2}\right)^2$

س ۲۳

۲ جم^{۲} $\frac{\theta}{۲}$ = ۱ + جم θ پس اسواسطے

$۴\,\text{جم}^{۴}\frac{\theta}{۲} = (۱ + \text{جم}\,\theta)^{۲} = ۱ + ۲\,\text{جم}\,\theta + \text{جم}^{۲}\theta$

$= ۱ + ۲\,\text{جم}\,\theta + \frac{۱ + \text{جم}\,۲\theta}{۲} = \frac{۱}{۲}(۳ + ۴\,\text{جم}\,\theta + \text{جم}\,۲\theta)$

اسواسطے $\text{جم}^{۴}\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{۸}(۳ + ۴\,\text{جم}\,\theta + \text{جم}\,۲\theta)$

اس قاعدہ کو واسطے ہر ایک سوال کے استعمال کرو جیسا کہ

$\text{جم}^{۴}\frac{\pi}{۸} + \text{جم}^{۴}\frac{۳\pi}{۸} + \text{جم}^{۴}\frac{۵\pi}{۸} + \text{جم}^{۴}\frac{۷\pi}{۸}$

$= \frac{۱۲}{۸} + \frac{۱}{۲}\left(\text{جم}\frac{\pi}{۴} + \text{جم}\frac{۳\pi}{۴} + \text{جم}\frac{۵\pi}{۴} + \text{جم}\frac{۷\pi}{۴}\right) +$

$\frac{۱}{۸}\left(\text{جم}\frac{\pi}{۲} + \text{جم}\frac{۳\pi}{۲} + \text{جم}\frac{۵\pi}{۲} + \text{جم}\frac{۷\pi}{۲}\right) = \frac{۳}{۲}$ بموجب دفعہ (۳۵)

س ۲۴

$\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^{\circ} = \frac{\text{جب}\,۱۵^{\circ}}{۱ + \text{جم}\,۱۵^{\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}}{۱ + \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲}}} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + ۱}$

$= \frac{(\sqrt{۳} - ۱)(۲\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۳})}{(۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + ۱)(۲\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۳})} = \frac{۲\sqrt{۶} - ۲\sqrt{۲} - ۴ + ۲\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۲} + ۶}$

$= \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲} - ۲ + \sqrt{۳}}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$

شمار کنندہ اور نسب نما کو $۳ - ۲\sqrt{۲}$ میں ضرب دیا۔

تو $\sqrt{۶} - \sqrt{۳} + \sqrt{۲} - ۲$ حاصل ہوا جو کہ = جواب کے

س ۲۵

$\text{مس}\,۵۲\tfrac{۱}{۲}^{\circ} = \frac{\text{جب}\,۱۰۵^{\circ}}{۱ + \text{جم}\,۱۰۵^{\circ}} = \frac{\text{جب}\,۱۰۵^{\circ}}{۱ - \text{جم}\,۷۵^{\circ}} = \frac{\text{جم}\,۱۵^{\circ}}{۱ - \text{جب}\,۱۵^{\circ}}$

$= \frac{\frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲}}}{۱ - \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۳}}$

$$= \frac{(\sqrt{۳} - ۱ - \sqrt{۲})(۱ + \sqrt{۳})}{(\sqrt{۳} - ۱ - \sqrt{۲})(\sqrt{۳} + ۱ - \sqrt{۲})}$$

$$= \frac{\sqrt{۳} - ۲ - \sqrt{۲} + \sqrt{۶}}{\sqrt{۲}\,۲ - ۳} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲} - \sqrt{۳} + ۲}{\sqrt{۲}\,۲ - ۳}$$

اسجگہ بھی نسب نما اور شمار کنندہ کو ۳ + ۲ $\sqrt{۲}$ مین ضرب دیا

تو ۲ + $\sqrt{۳}$ − $\sqrt{۲}$ − $\sqrt{۶}$ حاصل ہوا جو کہ = جواب کے ہے

س ۲۶

$$\text{مس لا} = \frac{۳\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۳} - \text{مس}^{۳}\,\frac{\text{لا}}{۳}}{۱ - ۳\,\text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۳}}$$

اور اسلئے یہہ $= (۲ + \sqrt{۳})\,\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۳}$

اور یہہ $= \dfrac{۳ - \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۳}}{۱ - ۳\,\text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۳}} = ۲ + \sqrt{۳}$

اسلئے $۳ - \text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۳} = (۲ + \sqrt{۳})(۱ - ۳\,\text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۳})$

اسلئے $(۶ + ۳\sqrt{۳} - ۱)\,\text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۳} = ۲ + \sqrt{۳} - ۳$

اسلئے $\text{مس}^{۲}\,\frac{\text{لا}}{۳} = \dfrac{\sqrt{۳} - ۱}{۳\sqrt{۳} + ۵} = \dfrac{(۳\sqrt{۳} - ۵)(\sqrt{۳} - ۱)}{(۳\sqrt{۳} - ۵)(۳\sqrt{۳} + ۵)}$

$$= \frac{۱۴ - ۸\sqrt{۳}}{۲۷ - ۲۵} = ۷ - ۴\sqrt{۳}$$

اسلئے $\text{مس}\,\frac{\text{لا}}{۳} = \sqrt{۷ - ۴\sqrt{۳}} = \pm(\sqrt{۳} - ۲)$

اسواسطے $\text{مس لا} = \pm(\sqrt{۳} + ۲)(\sqrt{۳} - ۲) = \pm ۱$

س ۲۷

مس ا + جم ا = جب ا / جم ا + جم ا / جب ا

= (جب² ا + جم² ا) / (جب ا جم ا) = ۱ / (جم ا جب ا)

= ۲ / (۲ جب ا جم ا) = ۲ / جب ۲ ا اب ا کی جگہہ اسکی قیمت رکھو

= ۲ / جب ۲ (ن π + π/۴ ± π/۱۲) = ۲ / جب (π/۲ ± π/۶) = ۲ / جم π/۳

= ۲ ÷ ۱/۲ = ۴

س ۲۸

جم ا جم ۳ ا / (جم ۵ ا + جم ۳ ا) = جم ا جم ۳ ا / (۲ جم ا جم ۴ ا)

= جم ۳ ا / (۲ جم ۴ ا) = − ۱/۲

کیونکہ ۳ ا + ۴ ا = π اور اسلئے جم ۳ ا = − جم ۴ ا

س ۲۹

قع (ی + ا) + قع (ی − ا) = ۲ قع ی اسواسطے

۱ / جم (ی + ا) + ۱ / جم (ی − ا) = ۲ / جم ی

اسواسطے (جم (ی − ا) + جم (ی + ا)) / (جم (ی + ا) . جم (ی − ا)) = ۲ / جم ی

اسواسطے ۲ جم ی جم ا / (جم² ی − جب² ا) = ۲ / جم ی

اسواسطے جم² ی جم ا = جم² ی − جب² ا

$$\text{اسواسطے } \text{جم}^{2}\,\text{ی} = \frac{\text{جب}^{2}\,\text{ا}}{\text{۱} - \text{جم ا}} = \frac{\text{۱} - \text{جم}^{2}\,\text{ا}}{\text{۱} - \text{جم ا}}$$

$$= \text{۱} + \text{جم ا} = \text{۲}\,\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$$

$$\text{اسواسطے جم ی} = \pm\,\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{\text{۲}}$$

مثل ۳

$$\text{مس}^{2}\,\frac{\text{ہ}}{\text{۲}} = \frac{\text{۱}+\text{س}}{\text{۱}-\text{س}}\,\text{مس}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} \text{ اسواسطے}$$

$$\frac{\text{۱} - \text{مس}^{2}\,\frac{\text{ہ}}{\text{۲}}}{\text{۱} + \text{مس}^{2}\,\frac{\text{ہ}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۱} - \frac{\text{۱}+\text{س}}{\text{۱}-\text{س}}\cdot\frac{\text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}}{\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}}}{\text{۱} + \frac{\text{۱}+\text{س}}{\text{۱}-\text{س}}\cdot\frac{\text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}}{\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}}}$$

$$= \frac{(\text{۱}-\text{س})\,\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} - (\text{۱}+\text{س})\,\text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}}{(\text{۱}-\text{س})\,\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} + (\text{۱}+\text{س})\,\text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}}$$

اسلئے بموجب دفعہ ۶، ۷ کے

$$\text{جم ہ} = \frac{\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} - \text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} - \text{س}\left(\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} + \text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}\right)}{\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} + \text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} - \text{س}\left(\text{جم}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}} - \text{جب}^{2}\,\frac{\text{ی}}{\text{۲}}\right)}$$

$$= \frac{\text{جم ی} - \text{س}}{\text{۱} - \text{س جم ی}} \quad ✣$$

آٹھواں باب

بموجب دفعہ ۱۰۲ اکے

س ۱ جم (۱ + ب + س) = جم ۱ جم ب جم س - جم ۱ جب ب
جب س - جم ب جب س جب ۱ - جم س جب ۱ جب ب
تقسیم کیا طرفین کو جم ۱ جم ب جم س پر *
تو $\frac{\text{جم (۱ + ب + س)}}{\text{جم ۱ جم ب جم س}}$ = ۱- مس ب مس س - مس س
مس ۱ - مس ۱ مس ب *

بموجب دفعہ ۱۰۲ اکے

س ۲ جب (۱ + ب + س) = جب ۱ جم ب جم س + جب ب
جم س جم ۱ + جب س جم ۱ جم ب - جب ۱ جب ب جب
س طرفین کو تقسیم کرو جم ۱ جم ب جم س پر *
تو ∴ $\frac{\text{جب (۱ + ب + س)}}{\text{جم ۱ جم ب جم س}}$ = مس ۱ + مس ب + مس س
- مس ۱ مس ب مس س *

س ۳ جب (۱ - ب) + جب (ب - س) = ۲ جب $\frac{\text{۱ - س}}{۲}$. جم

(ا-۲ب+س)/۲ = -۲ جب (س-ا)/۲ جم (ا-۲ب+س)/۲

اور جب (س - ا) = ۲ جب (س-ا)/۲ جم (س-ا)/۲ ∴ جب

(ا - ب) + جب (ب - س) + جب (س - ا)

= ۲ جب (س-ا)/۲ {جم (س-ا)/۲ - جم (ا-۲ب+س)/۲} =

۲ جب (س-ا)/۲ ۲ جب (س-ب)/۲ جب (ب-ا)/۲ +

= - ۴ جب (ا-ب)/۲ جب (ب-س)/۲ جب (س-ا)/۲

∴ جب (ا - ب) + (ب - س) +

جب (س - ا) + ۴ جب (ا-ب)/۲ × جب (ب-س)/۲

جب (س-ا)/۲ = ۰

س۴ ۴ جب (θ - ا) جب (م θ - ا) جم (θ - م θ) = ۲ جم

(θ - م θ) {جم (θ - م θ) - جم (θ + م θ - ۲ا)}

بموجب دفعہ ۳، کے = ۲ جم² (θ - م θ) - ۲ جم (θ - م θ)

جم (θ + م θ - ۲ا) = ا + جم ۲ (θ - م θ)

- {جم ۲ (θ - ۲ا) + جم (۲ م θ - ۲ا)} = ا + جم ۲

(θ - م θ) - جم (۲ θ - ۲ا) - جم (۲ م θ - ۲ا)

س۵ جب (ا + ب) جم ب = جب (ا + ب + س - س) جم ب

= {جب (ا + ب + س) جم س - جم (ا + ب + س)

جب س} جم ب

جب (ا + س) جم س = جب (ا + ب + س - ب) جم س

= {جب (ا + ب + س) جم ب - جم (ا + ب + س) جب

ب} جم س

∴ جب (ا + ب) جم ب - جب (ا + س) جم س =

جم (ا + ب + س) {جب ب جم س - جب س جم ب}

= جم (ا + ب + س) جب (ب - س)

سٹ۶ جم (ا + ب + س) + جم (ا + ب - س) =

۲ جم (ا + ب) جم س اور جم (ا - ب + س) + جم (ب

+ س - ا) = ۲ جم (ا - ب) جم س

ان دونون رقمون کی حاصل جمع = ۲ جم س {جم (ا + ب)

+ جم (ا - ب)}

= ۴ جم ا جم ب جم س

سٹ۷ جم ۲ ا + جم ۲ ب = ۲ جم (ا + ب) جم (ا - ب)

جم ۲ س + جم ۲ (ا + ب + س)

= ۲ جم (۲ س + ا + ب) جم (ا + ب)

اسلئے حاصل جمع ان دونون کی = ۲ جم (ا + ب) {جم (ا - ب)

+ جم (۲ س + ا + ب) }

= ۲ جم (ا + ب) ۲ جم (ا + س) جم (ب + س)

= ۴ جم (ا + ب) جم (ب + س) جم (س + ا)

س ۸ — جب (ا − ب) جب (ب − س) جب (س − ا) =

ذو اضعاف اقل کے ∴ کسر کل کے مساوی ہے اسکے

= − جب ا جب (ب − س) − جب ب جب (س − ا)

− جب س جب (ا − ب)

= − ½ { جم (ا − ب + س) − جم (ا + ب − س) } −

½ { جم (ب + ا − س) − جم (ب + س − ا) } −

½ { جم (س − ا + ب) − جم (س + ا + ب) } = ۰

س ۹ — جم (ا + ب) جب ب − جم (ا + س) جب س

= ½ { جب (ا + ب + ب) − جب (ا + ب − ب) }

− ½ { جب (ا + س + س) − جب (ا + س − س) }

= ½ جب (ا + ۲ ب) − ½ جب (ا + ۲ س)

جب (ا + ب) جم ب − جب (ا + س) جم س

= ½ { جب (ا + ب + ب) + جب (ا + ب − ب) }

؞ ½ { جب (ا + س + س) + جب (ا + س − س) }

= ½ جب (ا + ۲ ب) − ½ جب (ا + ۲ س) چونکہ دونون

رقمین باہم برابر ہین اسلئے اول رقم بہی دوسری سے برابر ہے

مثل ۱۰ جب (ا + ب − ۲ س) جم ب − جب (ا + س − ۲ ب) جم س

= ½ { جب (ا + ۲ ب − ۲ س) + جب (ا − ۲ س) − جب

(ا + ۲ س − ۲ ب) − جب (ا − ۲ ب) } +

جب (ب − س) { جم (ب + س − ا) + جم (ا + س − ب)

+ جم (ا + ب − س) }

= ½ { جب (۲ ب − ا) + جب (ا − ۲ س) } +

½ { جب ا + جب (۲ ب − ۲ س − ا) } + ½ { − جب ا

+ جب (۲ ب − ۲ س + ا) }

= ½ { جب (۲ ب − ا) + جب (ا − ۲ س) + جب

(۲ ب − ۲ س − ا) + جب (۲ ب − ۲ س + ا) }

اسلئے یہہ دونون رقمین باہم برابر ہین ✦

مثل ۱۱ جب (ا + ب + س) جب ب = ½ { جم (ا + س) − جم

(ا + ۲ ب + س) }

جب (ا + ب) جب (ب + س) = ½ { جم (ا − س) − جم (ا + ۲ ب + س) }

جب ۱ جب س = ½ { جم (۱ − س) − جم (۱ + س) }

جب (۱ + ب) جب (ب + س) − جب ۱ جب س

= ½ { جم (۱ + س) − جم (۱ + ۲ ب + س) }

= جب (۱ + ب + س) جب ب

س ۱۲ — جب ۱ جب ب جب (ب − ۱) = ½ { جم (۱ − ب)

− جم (۱ + ب) } جب (ب − ۱) = ½ جم (ب − ۱) جب

(ب − ۱) − ¼ { جب ۲ ب − جب ۲ ۱ }

= ¼ جب ۲ (ب − ۱) − ¼ جب ۲ ب + ¼ جب ۲ ۱

جب ب جب س جب (س − ب) اور جب س جب ۱ جب

(۱ − س) اسیطرح تیسری مثال کے بموجب

جب (ب − ۱) جب (س − ب) جب (۱ − س) = ¼ { جب ۲

(۱ − ب) + جب ۲ (ب − س) + جب ۲ (س − ۱) }

پس ان چارون کی حاصل جمع = صفر کے ہے ٭

س ۱۳ — جم (۱ + ب) جب (۱ − ب) = ½ (جب ۲ ۱ − جب ۲ ب)

جم (ب + س) جب (ب − س) = ½ (جب ۲ ب − جب ۲ س)

جم (س + ص) جب (س − ص) = ½ (جب ۲ س − جب ۲ ص)

جم (ص + ۱) جب (ص − ۱) = ½ (جب ۲ ص − جب ۲ ۱)

ان چارون رقمونکا حاصل جمع = صفر کے ہو ٭

س۱۴ جب (ص − ب) جب (ا − س) = ½ { جم (ا + ب − س − ص) − جم (ا − ب − س + ص) }

جب (ب − س) جب (ا − ص) = ½ { جم (ا − ب + س − ص) − جم (ا + ب − س − ص) }

جب (س − ص) جب (ا − ب) = ½ { جم (ا − ب − س + ص) − جم (ا − ب + س − ص) }

اور ان تینوں کا حاصل جمع = صفر کے ہے ۔

س۱۵ مم ½ا + مم ب/۲ = جم ½ا / جب ½ا + جم ب/۲ / جب ب/۲ = (جب ب/۲ جم ½ا + جب ½ا جم ب/۲) / (جب ½ا جب ب/۲)

= جب ½(ا + ب) / (جب ½ا جب ب/۲) = جم س/۲ / (جب ½ا جب ب/۲)

∴ جم س/۲ / (جب ½ا جب ب/۲) + مم س/۲ = جم س/۲ { 1 / (جب ½ا جب ب/۲) + 1 / جب س/۲ }

= جم س/۲ / (جب ½ا جب ب/۲ جب س/۲) { جب س/۲ + جب ½ا جب ب/۲ }

= جم س/۲ / (جب ½ا جب ب/۲ جب س/۲) { جم ½(ا + ب) + جب ½ا جب ب/۲ }

= جم ½ا جم ب/۲ جم س/۲ / (جب ½ا جب ب/۲ جب س/۲) = مم ½ا مم ب/۲ مم س/۲

س۱۶ جب ا + جب ب = ۲ جب ½(ا + ب) جم ½(ا − ب)

= ۲ جم س/۲ جم ½(ا − ب)

جب س = ۲ جب س/۲ جم س/۲ = ۲ جم س/۲ جم ½(ا + ب)

∴ جب ا + جب ب + جب س = ۲ جم س/۲ { جم ½(ا − ب)

+ جم ½ (ا + ب)}

− + جم ب/۲ ۲ جم ا/۲ جم س/۲ = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲

س ١٧ جب ا + جب س = ۲ جب ½ (ا + س) جم ½ (ا − س)

= ۲ جم ب/۲ جم ½ (ا − س)

جب ب = ۲ جب ب/۲ جم ب/۲ = ۲ جم ب/۲ جم ½ (ا + س)

∴ جب ا − جب ب + جب س = ۲ جم ب/۲ {جم ½ (ا − س) −

جم ½ (ا + س)}

= ۲ جم ب/۲ ۲ جب ا/۲ جب س/۲ =

۴ جب ا/۲ جم ب/۲ جب س/۲ ·

س ١٨ جم ۲ا + جم ۲ب = ۲ جم (ا + ب) جم (ا − ب) = −۲ جم

س جم (ا − ب)

جم ۲س = ۲ جم² س − ۱ = −۲ جم س جم (ا + ب) − ۱

∴ جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س = −۲ جم س {جم (ا − ب)

+ جم (ا + ب)} − ۱

= −۲ جم س ۲ جم ا جم ب − ۱ = −۴ جم ا جم ب جم س − ۱

∴ جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س + ۴ جم ا جم ب جم س + ۱ = ۰

س ١٩ جم ۴ا + جم ۴ب = ۲ جم ۲ (ا + ب) جم ۲ (ا − ب) =

۲ جم ۲ س جم ۲ (ا - ب)

جم ۴ س = ۲ جم ۲ ۲ س - ۱ = ۲ جم ۲ س جم ۲ (ا + ب) - ۱

∴ جم ۴ ا + جم ۴ ب + جم ۴ س = ۲ جم ۲ س {جم ۲ (ا - ب)

+ جم ۲ (ا + ب)} - ۱

= ۲ جم ۲ س . ۲ جم ۲ ا جم ۲ ب - ۱ = ۴ جم ۲ ا جم ۲ ب

جم ۲ س - ۱

∴ جم ۴ ا + جم ۴ ب + جم ۴ س + ۱ = ۴ جم ۲ ا جم ۲ ب

جم ۲ س

مثل ۲

فرض کرو کہ ا = ½ (π - ا) اور ب = ½ (π - ب) اور

س = ½ (π - س)

∴ ا + ب + س = ½ (۳π - ا - ب - س) = ½ × ۲π =

π ۔

اسجگہ ۱۶ امثال کے بموجب

جب ا + جب ب + جب س = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲

یعنے جم ا/۲ + جم ب/۲ + جم س/۲ = ۴ جم (π - ا)/۴ جم (π - ب)/۴

جم (π - س)/۴ ۔

س ۲۱ فرض کرو ا = ½ (π − ا) اور ب = ½ (π − ب) اور

س = ½ (π − س)

∴ ا + ب + س = ½ (۳π − ا − ب − س) = ½ ×

۲π = π

انجگھ ۷ امثال کے بموجب

جب ا − جب ب + جب س =

۴ جم ½ جم ب/۲ جب س/۲

یعنے جم ½ − جم ب/۲ + جم س/۲ = ۴ جب (π − ا)/۴

جم (π − ب)/۴ جب (π − س)/۴

س ۲۲ فرض کرو کہ ا = ½ (π − ا) اور ب = ½ (π − ب)

اور س = ½ (π − س)

∴ ا + ب + س = ½ (۳π − ا − ب − س) =

½ × ۲π = π

انجگھ ۳۰ دفعہ کے بموجب

جم ا + جم ب + جم س − ۱

= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب س/۲

یعنے جب ا/۲ + جب ب/۲ + جب س/۲ − ۱ = ۴ جب (π − ا)/۴ −

جب (π − ب)/۴ جب (π − س)/۴ ۔

جب^2 ا + جب^2 ب + جب^2 س = ۱/۲ {۱ − جم ۲ا + ۱ − جم س ۲۳

۲ب + ۱ − جم ۲س} ۔

= ۳/۲ − ۱/۲ {جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س}

= ۳/۲ + ۱/۲ {۱ + ۴ جم ا جم ب جم س}

اسجگہ ۱۸ امثال کے بموجب

= ۲ + ۲ جم ا جم ب جم س

∴ جب^2 ا + جب^2 ب + جب^2 س − ۲ جم ا جم ب جم س = ۲

جب^2 ۲ا + جب^2 ۲ب + جب^2 ۲س س ۲۴

= ۱/۲ {۳ − جم ۴ا − جم ۴ب − جم ۴س}

= ۳/۲ − ۱/۲ {۴ جم ۲ا جم ۲ب جم ۲س − ۱} ۔

یہاں ۱۹ امثال کے بموجب

= ۲ − ۲ جم ۲ا جم ۲ب جم ۲س ۔

∴ جب۲ ۲ ا + جب۲ ۲ ب + جب۲ ۲ س + ۲ جم ۲ ا جم ۲ ب جم ۲ س = ۲ +

س ۲۵ مس ا/۲ مس ب/۲ + مس ب/۲ مس س/۲ + مس س/۲ مس ا/۲

= ۱ / (تم ا/۲ تم ب/۲) + ۱ / (تم ب/۲ تم س/۲) + ۱ / (تم س/۲ تم ا/۲)

= (تم ا/۲ + تم ب/۲ + تم س/۲) / (تم ا/۲ تم ب/۲ تم س/۲) = ۱

مثال ۵ کے بموجب

س ۲۶ جب ا + جب ب − جب س

= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جم س/۲

بموجب مثال ۱۷ کے

جب ا + جب ب + جب س = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲

بموجب مثال ۱۶ کے

اس تقسیم سے (جب ا + جب ب − جب س) / (جب ا + جب ب + جب س) = (جب ا/۲ جب ب/۲) / (جم ا/۲ جم ب/۲)

= مس ا/۲ مس ب/۲

س ۲۷ جم ۱ جب ب جب س + جم ب جب ۱ جب س

+ جم س جب ۱ جب ب ⁘

= جب س (جم ۱ جب ب + جم ب جب ۱) + جم س جب ۱

جب ب ⁘

= جب س جب (۱ + ب) + جم س جب ۱ جب ب

= جب² س + جم س جب ۱ جب ب

= ۱ - جم² س + جم س جب ۱ جب ب

= ۱ + جم س { جم (۱ + ب) + جب ۱ جب ب } =

۱ + جم س جم ۱ جم ب ⁘

س ۲۸ ۲۷ وین مثال کو لو اور تقسیم کرو جب ۱ جب ب جب س پر

∴ (۱ / جب ۱ جب ب جب س) + (جم ۱ جم ب جم س / جب ۱ جب ب جب س) = (جم ۱ / جب ۱)

+ (جم ب / جب ب) + (جم س / جب س) یہی مطلوب تھا ⁘

س ۲۹ ۷ اوین مثال کے بموجب ((جب ب + جب س - جب ۱) (جب س + جب ۱ - جب ب) / ۴ جب ۱ جب ب)

= (۱۶ جب (ب/۲) جب (س/۲) جم (ب/۲) جم (۱/۲) جب (س/۲) جب (۱/۲) جم (س/۲) / ۱۶ جب (۱/۲) جم (۱/۲) جب (ب/۲) جم (ب/۲)) = جب² (س/۲)

س ۳۰ جم ۱ + (جب ۱ / جب ب جب س) = (جم ۱ / جب ۱) + (جب ۱ / جب ب جب س)

= (جم ۱ جب ب جب س + جب² ۱ / جب ۱ جب ب جب س) = (۱ - جم² ۱ + جم ۱ جب ب جب س / جب ۱ جب ب جب س)

$$= \frac{\text{۱ + جم ۱ \{ جم (ب + س) + جب ب جب س \}}}{\text{جب ۱ جب ب جب س}} = \frac{\text{۱ + جم ۱ جم ب جم س}}{\text{جب ۱ جب ب جب س}}$$

اسجگہ ہمین ایک جملہ ملا ہے جسمین ۱ و ب و س باندازہ مرتبط ہین اور ہم اوسی طریقہ سے اس سے وہی نتیجہ حاصل کرینگے جو اگر اصلی مثالین ۱ و ب و س مین سے کسی دو مقدار کو ایکدوسریکی جگہہ بدلدین

س ۱۳۱ مس ۱ + مس ب + مس س = مس ۱ مس ب مس س بموجب دفعہ ۱۰۲ کے

$$\text{جب ۱ + جب ب + جب س} = \text{۴ جم } \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{ب}}{\text{۲}} \text{ جم } \frac{\text{س}}{\text{۲}} \text{ موافق مثال ۱۴ کے}$$

∴ تقسیم سے

$$\frac{\text{مس ۱ + مس ب + مس س}}{\text{۲ (جب ۱ + جب ب + جب س)}} = \frac{\text{مس ۱ مس ب مس س}}{\text{۱۶ جم }\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{س}}{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{۸ جب }\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ جب }\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\text{ جب }\frac{\text{س}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{س}}{\text{۲}}}{\text{۱۶ جم ۱ جم ب جم س جم}^{\text{۲}}\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ جم}^{\text{۲}}\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\text{ جم}^{\text{۲}}\frac{\text{س}}{\text{۲}}} =$$

$$\frac{\text{مس }\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ مس }\frac{\text{ب}}{\text{۲}}\text{ مس }\frac{\text{س}}{\text{۲}}}{\text{۲ جم ۱ جم ب جم س}}$$

س ۱۳۲ $\text{جب ن ۱ + جب ن ب} = \text{۲ جب }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (۱ + ب) جم }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (۱ − ب)}$

$$= \text{۲ جب }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (π − س) جم }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (۱ − ب)}$$

$$= \text{۲ \{ جب }\frac{\text{ن π}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{ن س}}{\text{۲}}\text{ − جم }\frac{\text{ن π}}{\text{۲}}\text{ جب }\frac{\text{ن س}}{\text{۲}}\text{ \} جم }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (۱ − ب)}$$

$$= \text{۲ جب }\frac{\text{ن π}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{ن س}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (۱ − ب) ∵ جم }\frac{\text{ن π}}{\text{۲}}\text{ = ۰}$$

$$\text{نیز جب ن س} = \text{۲ جب }\frac{\text{ن س}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{ن س}}{\text{۲}}$$

$$= \text{۲ جب }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (π − ۱ − ب) جم }\frac{\text{ن س}}{\text{۲}}$$

$$= \text{۲ \{ جب }\frac{\text{ن π}}{\text{۲}}\text{ جم }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (۱ + ب) − جم }\frac{\text{ن π}}{\text{۲}}\text{ جب }\frac{\text{ن}}{\text{۲}}\text{ (۱ + ب) \} جم }\frac{\text{ن س}}{\text{۲}}$$

= ۲ جب نπ/۲ جم ن/۲ (ا + ب) جم ن س/۲

∴ جب ن ا + جب ن ب + جب ن س

= ۲ جب نπ/۲ جم ن س/۲ {جم ن/۲ (ا − ب) + جم ن/۲ (ا + ب)}

= ۴ جب نπ/۲ جم ن ا/۲ جم ن ب/۲ جم ن س/۲

۳۲ مثال کے بموجب

س ۳۳ جب ن ا + جب ن ب = ۲ {جب نπ/۲ جم ن س/۲ − جم نπ/۲ جب ن س/۲} جم ن/۲ (ا − ب)

= − ۲ جم نπ/۲ جب ن س/۲ جم ن/۲ (ا − ب) چونکہ جب نπ/۲ =

نیز جب ن س = ۲ جب ن س/۲ جم ن س/۲

= ۲ جم ن/۲ (π − ا − ب) جب ن س/۲

= ۲ {جم نπ/۲ جم ن/۲ (ا + ب) + جب نπ/۲ جب ن/۲ (ا + ب)} جب ن س/۲

= ۲ جم نπ/۲ جب ن س/۲ جم ن/۲ (ا + ب) ∴ جب ن ا + جب ن ب + جب ن س

= − ۲ جم نπ/۲ جب ن س/۲ {جم ن/۲ (ا − ب) − جم ن/۲ (ا + ب)}

= − ۴ جم نπ/۲ جب ن س/۲ جب ن ا/۲ جب ن ب/۲

٢٠ مثال کے بموجب

س ٣٤

$$\text{جم}\frac{1}{2}+\text{جم}\frac{\text{ب}}{2}+\text{جم}\frac{\text{س}}{2}=4\,\text{جم}\frac{\pi-1}{4}\,\text{جم}\frac{\pi-\text{ب}}{4}\,\text{جم}\frac{\pi-\text{س}}{4}$$

$$=4\,\text{جم}\frac{\text{ب}+\text{س}}{4}\,\text{جم}\frac{\text{س}+1}{4}\,\text{جم}\frac{1+\text{ب}}{4}$$

س ٣٥

$$\frac{\text{مس ب}}{\text{مس }1}+\frac{\text{مس س}}{\text{مس }1}=\frac{1}{\text{مس }1}\left(\frac{\text{حب ب}}{\text{جم ب}}+\frac{\text{حب س}}{\text{جم س}}\right)$$

$$=\frac{\text{حب }(\text{ب}+\text{س})}{\text{مس }1\text{ جم ب جم س}}$$

$$=\frac{\text{حب }1}{\text{مس }1\text{ جم ب جم س}}=\frac{\text{جم }1}{\text{جم ب جم س}}$$ اسطرح ہم دیکھہ سکتے ہیں

کہ اوپر کی مثال $$=\frac{\text{جم }1}{\text{جم ب جم س}}+\frac{\text{جم ب}}{\text{جم س جم }1}+\frac{\text{جم س}}{\text{جم }1\text{ جم ب}}$$

$$=\frac{\text{جم}^2 1+\text{جم}^2\text{ب}+\text{جم}^2\text{س}}{\text{جم }1\text{ جم ب جم س}}=\frac{3-\text{حب}^2 1-\text{حب}^2\text{ب}-\text{حب}^2\text{س}}{\text{جم }1\text{ جم ب جم س}}$$

$$=\frac{1-2\,\text{جم }1\,.\,\text{جم ب}\,.\,\text{جم س}}{\text{جم }1\text{ جم ب جم س}}$$ ٢٣ مثال کے بموجب

$$=\text{قع }1\text{ قع ب قع س}-2$$

س ٣٦

فرض کرو کہ $1+\text{ب}+\text{س}+\text{د}=180^\circ$ پھر $1+\text{ب}=180-(\text{س}+\text{د})$

$\therefore\ \text{مس }(1+\text{ب})=-\text{مس }(\text{س}+\text{د})$ بموجب دفعہ ٤٨

$$\therefore\ \frac{\text{مس }1+\text{مس ب}}{1-\text{مس }1\text{ مس ب}}=-\frac{\text{مس س}+\text{مس د}}{1-\text{مس س مس د}}$$

$$\therefore\ (\text{مس }1+\text{مس ب})(1-\text{مس س مس د})$$

$$=-(\text{مس س}+\text{مس د})(1-\text{مس }1\text{ مس ب})$$

$$\therefore\ \text{مس }1+\text{مس ب}+\text{مس س}+\text{مس د}$$

= (مس ا + مس ب) مس س مس و + (مس س + مس و) مس ا مس ب +

= مس ب مس س مس و + مس ا مس س مس و

+ مس ا مس ب مس و + مس ا مس ب مس س

س ٤٧ جب² س / جب² ا = ۱ − مس (ا − ب) / مس ا = ۱ − جب (ا − ب) جم ا / جم (ا − ب) جب ا

= (جب ا جم (ا − ب) − جم ا جب (ا − ب)) / جم (ا − ب) جب ا = جب {ا − (ا − ب)} / جم (ا − ب) جب ا

= جب ب / جم (ا − ب) جب ا اور اسلئے جب² س = جب ا جب ب / جم (ا − ب)

∴ جم² س = ۱ − جب² س = ۱ − جب ا جب ب / جم (ا − ب) = (جم (ا − ب) − جب ا جب ب) / جم (ا − ب)

= جم ا جم ب / جم (ا − ب) ∴ جب² س / جم² س = جب ا جب ب / جم (ا − ب)

÷ جم ا جم ب / جم (ا − ب) = جب ا جب ب / جم ا جم ب یعنی مس² س = مس ا مس ب

س ٤٨ مس² ا / مس² ب = جم ب (جم و − جم ا) / جم ا (جم و − جم ب) ∴ (جم و − جم ا) / (جم و − جم ب)

= مس² ا جم ب / مس² ب جم ا = جب² ا جم ب / جب² ب جم ا

∴ جم و = (جب² ب جم² ا − جب² ا جم² ب) / (جب² ب جم ا − جب² ا جم ب) =

((۱ − جم² ب) جم² ا − (۱ − جم² ا) جم² ب) / ((۱ − جم² ب) جم ا − (۱ − جم² ا) جم ب)

= (جم² ا − جم² ب) / ((جم ا − جم ب) (۱ + جم ا جم ب)) = (جم ا + جم ب) / (۱ + جم ا جم ب)

∴ (۱ − جم و) / (۱ + جم و) = (۱ + جم ا جم ب − جم ا − جم ب) / (۱ + جم ا جم ب + جم ا + جم ب) =

$$\frac{(\text{ا}-\text{جم ا})(\text{ا}-\text{جم ب})}{(\text{ا}+\text{جم ا})(\text{ا}+\text{جم ب})}$$

∴ $\text{مس}^2\frac{\text{ج}}{2} = \text{مس}^2\frac{\text{ا}}{2}\ \text{مس}^2\frac{\text{ب}}{2}$ بموجب دفعہ ٨٢

س ۳۹ $\frac{\text{مس}^2\text{ه}}{\text{مس}^2\text{هَ}} = \frac{\text{مس}^2\text{ا}}{\text{مس}^2\text{اَ}}$ لیکن $\text{مس}^2\text{ه} = \frac{\text{ا}-\text{جم ٢ه}}{\text{جم ٢ه}}$

$$= \frac{\text{جم ب}-\text{جم ا}}{\text{جم ا}}$$

اور $\text{مس}^2\text{هَ} = \frac{\text{ا}-\text{جم ٢هَ}}{\text{جم ٢هَ}} = \frac{\text{جم ب}-\text{جم اَ}}{\text{جم اَ}}$ اسلئے

$$\frac{\text{جم ب}-\text{جم ا}}{\text{جم ب}-\text{جم اَ}} \cdot \frac{\text{جم اَ}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{مس}^2\text{ا}}{\text{مس}^2\text{اَ}}$$

∴ $\frac{\text{جم ب}-\text{جم ا}}{\text{جم ب}-\text{جم اَ}} = \frac{\text{جب}^2\text{ا جم اَ}}{\text{جب}^2\text{اَ جم ا}}$ ∴ جم ب =

$$\frac{\text{جب اَ جم}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ا جم اَ}}{\text{جب}^2\text{اَ جم ا} - \text{جب}^2\text{ا جم اَ}}$$

$$= \frac{(\text{ا}-\text{جم}^2\text{اَ})\ \text{جم}^2\text{ا} - (\text{ا}-\text{جم}^2\text{ا})\ \text{جم}^2\text{اَ}}{(\text{ا}-\text{جم}^2\text{اَ})\ \text{جم ا} - (\text{ا}-\text{جم}^2\text{ا})\ \text{جم اَ}} =$$

$$= \frac{\text{جم}^2\text{ا} - \text{جم}^2\text{اَ}}{(\text{جم ا} - \text{جم اَ})(\text{ا}+\text{جم ا جم اَ})} = \frac{\text{جم ا}+\text{جم اَ}}{\text{ا}+\text{جم ا جم اَ}} \therefore$$

$$\frac{\text{ا}-\text{جم ب}}{\text{ا}+\text{جم ب}} = \frac{\text{ا}+\text{جم ا جم اَ}-\text{جم ا}-\text{جم اَ}}{\text{ا}+\text{جم ا جم اَ}+\text{جم ا}+\text{جم اَ}}$$

$$= \frac{(\text{ا}-\text{جم ا})(\text{ا}-\text{جم اَ})}{(\text{ا}+\text{جم ا})(\text{ا}+\text{جم اَ})}$$ ∴ $\text{مس}^2\frac{\text{ب}}{2} = \text{مس}^2\frac{\text{ا}}{2}\ \text{مس}^2\frac{\text{اَ}}{2}$

س ۴۰ $\text{جم ی} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}}$ اور $\text{جم یَ} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}/2}$

∴ ۱ − جم ی = (جم ب − جم ا) / جم ب اور ۱ − جم یَ = (جم بَ − جم ا) / جم بَ

∴ ۲ جب² ی/۲ = (جم ب − جم ا) / جم ب اور ۲ جب² یَ/۲ = (جم بَ − جم ا) / جم بَ

∴ ۴ جب² ی/۲ جب² یَ/۲ = (جم ب − جم ا)(جم بَ − جم ا) / (جم ب جم بَ)

اِسلیے جب² ا = (جم ب − جم ا)(جم بَ − جم ا) / (جم ب جم بَ)

∴ جم ب جم بَ جب² ا = جم ب جم بَ − جم ا (جم ب + جم بَ)

+ جم² ا

∴ جم ب جم بَ جم² ا = جم ا (جم ب + جم بَ) − جم² ا

∴ جم ا (۱ + جم ب جم بَ) = جم ب + جم بَ

∴ جم ا = (جم ب + جم بَ) / (۱ + جم ب جم بَ) ∴ (۱ − جم ا) / (۱ + جم ا) =

(۱ − جم ب)(۱ − جم بَ) / ((۱ + جم ب)(۱ + جم بَ)) تو مس² ا/۲ = مس² ب/۲ مس² بَ/۲

س۱۴. ذیل کا نتیجہ ٹہیک ہی اگر مم ب − مم (ا + ہ) = مم ہ + مم (ا − ب)

یعنے اگر جم ب / جب ب − جم (ا + ہ) / جب (ا + ہ) = جم ہ / جب ہ + جم (ا − ب) / جب (ا − ب)

یعنی (جب (ا + ہ) جم ب - جم (ا + ہ) جب ب) / (جب ب جب (ا + ہ)) =

(جب (ا - ب) جم ہ + جم (ا - ب) جب ہ) / (جب ہ جب (ا - ب))

یعنی اگر جب (ا + ہ - ب) / (جب ب جب (ا + ہ)) = جب (ا - ب + ہ) / (جب ہ جب (ا - ب))

اور یعنی اگر جب ہ جب (ا - ب) = جب ب جب (ا + ہ)

اور یہہ فرضاً درست ہی ؛

∵ (مس ا - جم ہ مس ب)۲ / جب۲ ہ = مس۲ ا - مس۲ ب ؛ س۴۲

(مس ا - جم ہ مس ب)۲ = (۱ - جم۲ ہ) (مس۲ ا - مس۲ ب)

∴ مس۲ ا - ۲ جم ہ مس ا مس ب + جم۲ ہ مس۲ ب =

(۱ - جم۲ ہ) (مس۲ ا - مس۲ ب)

∴ مس۲ ب - ۲ جم ہ مس ا مس ب + جم۲ ہ مس۲ ا = ۰

یعنی (مس ب - جم ہ مس ا)۲ = ۰

∴ مس ب - جم ہ مس ا = ۰

∴ جم ہ = مس ب / مس ا ؛

س ۴۳

جم ہ = (مس ی)/(مس ا) ∴ مس ۲ ہ = (مس ۲ ا - مس ۲ ی)/(مس ۲ ی)

∴ (مس ۲ ا - مس ۲ ی)/(مس ۲ ی) = (مس ۲ ا)/(جب ۲ ی) +

∴ (جم ۲ ی مس ۲ ا - جب ۲ ی)/(جب ۲ ی) = (مس ۲ ا)/(جب ۲ ی)

∴ جم ۲ ی مس ۲ ا - (۱ - جم ۲ ی) = مس ۲ ا

∴ جم ۲ ی = (۱ + مس ۲ ا)/(۱ + مس ۲ ا) = (۱)/(جم ۲ ا) ∴ جم ی = ± (جم ا)/(جم ا)

اوپر کیطرف دیکھو تو اسیطرح جم ی = (جم ا)/(جم ا)

∴ (۱ - جم ی)/(۱ + جم ی) = (جم ا - جم ا)/(جم ا + جم ا) = (۲ جب ½ (ا - ا) جب ½ (ا + ا))/(۲ جم ½ (ا - ا) جم ½ (ا + ا))

= مس ½ (ا - ا) مس ½ (ا + ا)

س ۴۴

۱ - جم ۲ ا - جم ۲ ب - جم ۲ س + ۲ جم ا جم ب جم س

= ۱ - (جم ا - جم ب جم س) ۲ + جم ۲ ب جم ۲ س - جم ۲ ب - جم ۲ س

= (۱ - جم ۲ ب) (۱ - جم ۲ س) - (جم ا - جم ب جم س) ۲

= جب ۲ ب جب ۲ س - (جم ا - جم ب جم س) ۲

= (جب ب جب س - جم ا + جم ب جم س) (جب ب × جب س + جم ا - جم ب جم س)

= {- جم ا + جم (ب - س)} {جم ا - جم (ب + س)}

= ۴ جب (ا + ب - س)/۲ جب (ا - ب + س)/۲ جب (ا + ب + س)/۲ جب (ب + س - ا)/۲

پس اگر مجوزہ جملہ صفر قرار دیا جاوے تو ہم جیبون مندرجہ بالا مین سے ایک صفر ہونا چاہیے اور اسلئے ہم زاویون مین سے ایک زاویہ صفر ہونا چاہیے یا دو زاویون قائمون کا کوئی ضعف ٭

س ۵۴ فرضکرو کہ ل/ہ = ہو ہر ایک مس مفروض کے تو اسوقت دریافت کرو عام قیمت تین کسرونکی

پس و = ک مس (θ + ا) اور ی = ک مس (θ + ب)

اور ح = ک مس (θ + س) تو اسلئے (و + ی)/(و - ی) جب² (ا - ب)

= [مس (θ + ا) + مس (θ + ب)] / [مس (θ + ا) - مس (θ + ب)] جب² (ا - ب)

= [جب (θ + ا) جم (θ + ب) + جب (θ + ب) جم (θ + ا)] / [جب (θ + ا) جم (θ + ب) - جب (θ + ب) جم (θ + ا)] × جب² (ا - ب)

= جب (۲θ + ا + ب) / جب (ا - ب) جب² (ا - ب) = جب (۲θ + ا + ب) جب (ا - ب)

= ½ {جم (۲θ + ۲ب) - جم (۲θ + ۲ا)} اسیطرح سے

(ی + ح)/(ی - ح) جب² (ب - س) = ½ {جم (۲θ + ۲س)

- جم (۲θ + ۲ب)} ٭

س ۳۴

اور (ج + د)/(ج − د) جب^۲ (س − ا)

= ½ {جم (۲θ + ۲ا) − جم (۲θ + ۲س)}

اسیطرح سے تینون رقمون کی جمع صفر ہے ۔

دویم درجہ کی مساوات کے بموجب جب^۲ ی = (جب^۲ ب جب^۲ θ)/(جب^۲ ا)

اسلئے مس^۲ ی = (جب^۲ ب جب^۲ θ)/(جب^۲ ا − جب^۲ ب جب^۲ θ)

اول مساوات سے (مس^۲ θ)/(مس^۲ ا) + (جم^۲ ب جب^۲ θ)/(جب^۲ ا − جب^۲ ب جب^۲ θ) = ۱

∴ (مس^۲ θ)/(مس^۲ ا) = (جب^۲ ا − جب^۲ ب جب^۲ θ − جم^۲ ب جب^۲ θ)/(جب^۲ ا − جب^۲ ب جب^۲ θ)

= (جب^۲ ا − جب^۲ θ)/(جب^۲ ا − جب^۲ ب جب^۲ θ) ∴ (جب^۲ θ جم^۲ ا)/((۱ − جب^۲ θ) جب^۲ ا)

= (جب^۲ ا − جب^۲ θ)/(جب^۲ ا − جب^۲ ب جب^۲ θ)

∴ جب^۲ θ جم^۲ ا (جب^۲ ا − جب^۲ ب جب^۲ θ) = (جب^۲ ا − جب^۲ θ)

(۱ − جب^۲ θ) جب^۲ ا ۔

∴ جب^۴ θ (جب^۲ ا + جم^۲ ا جب^۲ ب) − جب^۲ θ (جم^۲ ا

جب^۲ ا + جب^۲ ا + جب^۴ ا) + جب^۴ ا = ۰

∴ جب^۴ θ (۱ − جم^۲ ا جم^۲ ب) − ۲ جب^۲ θ جب^۲ ا + جب^۴ ا = ۰

اس جملہ کو حل کرنے سے جو کچھ کہ مطلوب ہے، وہ حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{جب}^2\theta = \frac{1 \mp \text{جم}\,\text{ا}\,.\,\text{جم}\,\text{ب}}{1 - \text{جم}^2\text{ا}\,\text{جم}^2\text{ب}}\,.\,\text{جب}^2\text{ا} = \frac{\text{جب}^2\text{ا}}{1 \mp \text{جم}\,\text{ا}\,.\,\text{جم}\,\text{ب}}$$

س ۴۳

$$\frac{\text{جب}\left\{\theta - \text{ب} - (\text{ا} - \text{ب})\right\}}{\text{جب}\,(\theta - \text{ب})} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{جب}(\theta-\text{ب})\,\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}) - \text{جم}(\theta-\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\,(\theta-\text{ب})} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب}) - \text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\,\text{مم}(\theta-\text{ب}) = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

پھر

$$\frac{\text{جم}\left\{\theta-\text{ب} - (\text{ا}-\text{ب})\right\}}{\text{جم}\,(\theta-\text{ب})} = \frac{\text{اَ}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{جم}(\theta-\text{ب})\,\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}) + \text{جب}(\theta-\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\,(\theta-\text{ب})} = \frac{\text{اَ}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب}) + \text{مس}\,(\theta-\text{ب})\,\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{اَ}}{\text{ب}}$$

اسلئے

$$\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب})\,\text{مم}(\theta-\text{ب})\,\text{جب}\,(\text{ا}-\text{ب})\,\text{مس}(\theta-\text{ب}) = \left\{\text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب}) - \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\right\}\left\{\frac{\text{اَ}}{\text{ب}} - \text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب})\right\}$$

$$\therefore \text{جب}^2(\text{ا}-\text{ب}) = -\frac{\text{ا}\,\text{اَ}}{\text{ب}\,\text{ب}} + \left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \frac{\text{اَ}}{\text{ب}}\right).\,\text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب}) - \text{جم}^2.(\text{ا}-\text{ب})$$

$$\therefore 1 + \frac{\text{ا}\,\text{اَ}}{\text{ب}\,\text{ب}} = \left(\frac{\text{ا}}{\text{ب}} + \frac{\text{اَ}}{\text{ب}}\right)\text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب})$$

$$\therefore \text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب}) = \frac{\text{ب}\,\text{ب} + \text{ا}\,\text{اَ}}{\text{ب}\,\text{ا} + \text{ب}\,\text{اَ}}$$

س ۴۹

$$\text{مس ی} = \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{ی}{۲}}{۱ - \text{مس}^۲\,\frac{ی}{۲}} \quad \text{اسطرح} \quad \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{ی}{۲}}{۱ - \text{مس}^۲\,\frac{ی}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\theta\ \text{جم}\,\theta}{\text{جب}\,\acute{\theta} + \text{جم}\,\theta}$$

$$\therefore ۲\,\text{مس}\,\frac{ی}{۲}\,(\text{جب}\,\acute{\theta} + \text{جم}\,\theta) = (۱ - \text{مس}^۲\,\frac{ی}{۲})\,\text{جب}\,\theta\ \text{جم}\,\acute{\theta}$$

$$\therefore \text{جب}\,\theta\ \text{جم}\,\acute{\theta}\ \text{مس}^۲\,\frac{ی}{۲} + ۲\,\text{مس}\,\frac{ی}{۲}\,(\text{جب}\,\acute{\theta} + \text{جم}\,\theta)$$

$$= \text{جب}\,\theta\ \text{جم}\,\acute{\theta}$$

$$\text{مس}\,\frac{ی}{۲} = \frac{-(\text{جب}\,\acute{\theta} + \text{جم}\,\theta) \pm (۱ + \text{جب}\,\acute{\theta}\ \text{جم}\,\theta)}{\text{جب}\,\theta\ \text{جم}\,\acute{\theta}}$$

اوپر کے مثال کو دیکھو اسطرح

$$\text{مس}\,\frac{ی}{۲} = \frac{(۱ - \text{جب}\,\acute{\theta})\,(۱ - \text{جم}\,\theta)}{\text{جب}\,\theta\ \text{جم}\,\theta}$$

اب $\frac{۱ - \text{جم}\,\theta}{\text{جب}\,\theta} = \frac{۲\,\text{جب}^۲\,\frac{\theta}{۲}}{۲\,\text{جب}\,\frac{\theta}{۲}\,\text{جم}\,\frac{\theta}{۲}} = \text{مس}\,\frac{\theta}{۲}$ اور اسطرح

$$\frac{۱ - \text{جب}\,\acute{\theta}}{\text{جم}\,\theta} = \frac{۱ - \text{جم}\,(\acute{\theta} - \frac{\pi}{۲})}{\text{جب}\,(\acute{\theta} - \frac{\pi}{۲})} = \text{مس}\,(\frac{\pi}{۴} - \frac{\acute{\theta}}{۲})$$

اسی طرح $\text{مس}\,\frac{ی}{۲} = \text{مس}\,\frac{\theta}{۲}\ \text{مس}\,(\frac{\pi}{۴} - \frac{\acute{\theta}}{۲})$ اسیطرح سے

نچلی رقم سے ہم اسکو دریافت کرسکتی ہین ✦

$\text{مس}\,\frac{ی}{۲} = -\,\text{مم}\,\frac{\theta}{۲}\ \text{مم}\,(\frac{\pi}{۴} - \frac{\acute{\theta}}{۲})$ حاصل جمع ۲ قیمتو نکا

س ۴۹

مس ی/۲ = −۱ ✣

جم θ = جم ا جم ب ∴ (۱ − جم θ)/(۱ + جم θ) = (۱ − جم ا جم ب)/(۱ + جم ا جم ب)

∴ مس² θ/۲ = (۱ − جم ا جم ب)/(۱ + جم ا جم ب) ∴ اسطرح سے مس² θ/۲ = (۱ − جم اَ جم ب)/(۱ + جم اَ جم ب) ✣

(۱ − جم ا جم ب)(۱ − جم اَ جم ب) / (۱ + جم ا جم ب)(۱ + جم اَ جم ب) = مس² ب/۲ = (۱ − جم ب)/(۱ + جم ب)

∴ [۱ − (جم ا جم اَ) جم ب + جم ا جم اَ جم² ب] / [۱ + (جم ا جم اَ) جم ب + جم ا جم اَ جم² ب] = (۱ − جم ب)/(۱ + جم ب)

∴ (جم ا + جم اَ) جم ب / (۱ + جم ا جم اَ جم² ب) = جم ب

∴ جم ا + جم اَ = ۱ + جم ا جم اَ (۱ − جب² ب)

∴ جب² ب جم ا جم اَ = ۱ − جم ا − جم اَ + جم ا جم اَ

= (۱ − جم ا)(۱ − جم اَ) ∴ جب² ب = (۱/جم ا − ۱)(۱/جم اَ − ۱)

= (قع ا − ۱)(قع اَ − ۱) ✣

س ۵

جب (س + ا − ب) − جب (ب + س − ا) = جب (ا + ب − س) − جب (س + ا − ب)

∴ ۲ جب (ا − ب) جم س = ۲ جب (ب − س) جم ا

∴ (جب ا جم ب - جم ا جب ب) جم س = (جب ب جم س

- جم ب جب س) جم ا تقسیم کرو جم ا جم ب جم س پر

اِسیطرح مس ا - مس ب = مس ب - مس س ∴ مس ا

اور مس ب اور مس س بھی سلسلہ حسابیہ مین ہین +

فرض کرو جب ا اور جب ب اور جب س سلسلہ جمع وتفریق مین ہون س ۵۱

پس جب ب - جب ا = جب س - جب ب

اسیطرح ۲ جب (ب - ا)/۲ جم (ب + ا)/۲ = ۲ جب (س - ب)/۲

جم (س + ب)/۲

∴ جب (ب - ا)/۲ جب س/۲ = جب (س - ب)/۲ جب ا/۲

∴ (جب ب/۲ جم ا/۲ - جم ب/۲ جب ا/۲) جب س/۲

= (جب س/۲ جم ب/۲ - جم س/۲ جب ب/۲) جب ا/۲

تقسیم کرو اسکو جب ا/۲ جب ب/۲ جب س/۲ پر

اسیطرح مم ا/۲ - مم ب/۲ = مم ب/۲ - مم س/۲

اسیطرح مم س/۲ اور مم ب/۲ اور مم ا/۲ سلسلہ جمع تفریق مین ہین

فرض کرو جم^2 ا + جم^2 ب + جم^2 س = ا س ۵۲

∴ ۳ - جب^2 ا - جب^2 ب - جب^2 س = ا

∴ جب^2 ا + جب^2 ب + جب^2 س = ۲

۲۳۔ مثال ہو جب جم ا جم ب جم س = ۰ ∴ تین زاویون
مین سے ایک زاویہ قائمہ ہے اور یہہ تمام زاویون سے
بڑا ہوگا ❖

فرض کرو کہ یہہ زاویہ ا ہو پس ا = ۹۰°

∴ ب + س = ۹۰° = ا ∴ ا − س = ب ❖

جب (ا + س/۲) = جب (ا + (۱۸۰° − ا − ب)/۲) س ۵۳

= جب (۹۰° − (ب − ا)/۲) = جم (ا − ب)/۲

اور جب س/۲ = جم (ا + ب)/۲

اسیطرح جم (ا − ب)/۲ = ن جم (ا + ب)/۲

∴ جم ا/۲ جم ب/۲ + جب ا/۲ جب ب/۲ = ن (جم ا/۲
جم ب/۲ − جب ا/۲ جب ب/۲)

∴ (ن + ۱) جب ا/۲ جب ب/۲ = (ن − ۱) جم ا/۲ جم ب/۲

∴ (جب ا/۲ جب ب/۲)/(جم ا/۲ جم ب/۲) = (ن − ۱)/(ن + ۱) پس اسلئے مس ا/۲ مس ب/۲ =
(ن − ۱)/(ن + ۱)

فرض کرو کہ ا/ی قیمت ظاہر کرتا ہے جب ا/ی اور س ۵۴
جب ب/ی اور جب س/لا کے ❖

پہر د = ک جب ۱ اور ی = ک جب ب اور لا =
ک جب س

∴ (د - ی) مم س/۲ = ک (جب ۱ - جب ب) مم س/۲

= ۲ ک جب ½ (۱ - ب) جم ½ (۱ + ب) مم س/۲

= ۲ ک جب ½ (۱ - ب) جب س/۲ مم س/۲

= ۲ ک جب ½ (۱ - ب) جم س/۲

= ۲ ک جب ½ (۱ - ب) جب ½ (۱ + ب)

= ۲ ک {جب² ½ ۱ - جب² ½ ب} بموجب دفعہ ۲۷

اسیطرح (ی - لا) جم ½ = ۲ ک {جب² ½ ب - جب² ½ س}

اور {لا - د} مم ب/۲ = ۲ ک {جب² ½ س - جب² ½ ۱}

لہذا حاصل جمع ان تینوں کا صفر ہے ∗

س ۵۵ مس (۱ + ب + س) = مس م π = ۰ اور اس لئے
۱۰۲ دفعہ کے بموجب ∗

مس ۱ + مس ب + مس س - مس ۱ مس ب مس س = ۰

س ۵۶ جب (۲ ۱ + د) + جب (۲ ب + د) = ۲ جب
(۱ + ب + د) جم (۱ - ب)

جب (۲ص + د) − جب (۲ا + ۲ب + ۲ص + ۳د)
= −۲جب (ا + ب + د) جم (ا + ب + ۲ص + ۲د) ہے ∴

۲جب (ا + ب + د) {جم (ا − ب) − جم (ا + ب + ۲ص + ۲د)}

= ۲جب (ا + ب + د) ۲جب (ب + ص + د) جب (ا + ص + د)

= ۴جب (ا + ب + د) جب (ب + ص + د) جب (ص + ا + د)

اگر د = ۰ تو جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲س − جب (۲ا + ۲ب + ۲س) س ۵۷

= ۴جب (ا + ب) جب (ب + س) جب (س + ا)

اگر پھر ا + ب + س = π اور جب (۲ا + ۲ب + ۲س) = ۰

پھر جب (ا + ب) = جب س اور جب (ب + س) = جب ا اور جب (س + ا) = جب ب

پس جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲س = ۴ جب
س جب ا جب ب

اگر د = $\frac{\pi}{۲}$

تو جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س + جم (۲ا + ۲ب
+ ۲س) =

۴ جم (ا + ب) جم (ب + س) جم (س + ا)

اگر ا + ب + س = $\frac{\pi}{۲}$ اور جم (۲ا + ۲ب + ۲س)
= -۱

تو پھر جم (ا + ب) = جب س اور جم (ب + س)
= جب ا اور جم (س + ا) = جب ب

پس جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س -۱
= ۴ جب ا جب ب جب س ٭

۴ جم $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{س}{۲}$ = ۲ جم $\frac{س}{۲}$ {جم $\frac{۱}{۲}$ (ا - ب) س ۵۸
+ جم $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب)}

= جم $\frac{۱}{۲}$ (س + ا - ب) + جم $\frac{۱}{۲}$ (س + ب - ا) +
جم $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب + س) + جم $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب - س)

= جب ا + جب ب + جب س − جم ½(ا + ب + س)

− جم ½(ب + س − ا)

− جم ½(ا + س − ب) − جم ½(ا + ب − س)

پھر ۲ جب (ا + ب + س − π)/۴ جم (۳ا − ب − س + π)/۴ = جب ا

+ جب (ب + س − ا − π)/۲

= جب ا − جم (ب + س − ا)/۲

پس ۲ جب (ا + ب − س − π)/۴ جم (۳ب − ا − س + π)/۴

= جب ب − جم (ا + س − ب)/۲

اور ۲ جب (ا + ب + س − π)/۴ جم (ا + ب + س − π)/۴

= جب (ا + ب + س − π)/۲

= − جم (ا + ب + س)/۲

س ۵۹ جم ۵θ = جم (۳θ + ۲θ)

= جم ۳θ جم ۲θ جب ۳θ جب ۲θ +

= (۴ جم^{3} θ − ۳ جم θ)(۲ جم^{2} θ − ۱) −

(۳ جب θ − ۴ جب^{3} θ) ۲ جب θ جم θ

= (۴ جب^{3} θ − ۳ جم θ)(۲ جم^{2} θ − ۱) − ۲ جب^{2} θ

(۳ − ۴ جب^{2} θ) جم θ

= (۴ جم^{3} θ − ۳ جم θ)(۲ جم^{2} θ − ۱) − ۲

(۱ − جم^{2} θ)(۴ جم^{2} θ − ۱) جم θ

= ۸ جم^{5} θ − ۱۰ جم^{3} θ + ۳ جم θ − ۲ (−۴ جم^{4} θ + ۵ جم^{2} θ − ۱) جم θ

= ۱۶ جم^{5} θ − ۲۰ جم^{3} θ + ۵ جم θ ۰

جب ۶ θ = ۲ جب ۳ θ جم ۳ θ = ۲ (۳ جب θ − ۴ جب^{3} θ) مش ۶

(۴ جم^{3} θ − ۳ جم θ)

= ۲ جب θ (۳ − ۴ جب^{2} θ)(۴ جم^{3} θ − ۳ جم θ)

= ۲ جب θ (۴ جم^{2} θ − ۱)(۴ جم^{3} θ − ۳ جم θ) =

۲ جب θ (۱۶ جم^{5} θ) + ۳ جم θ ۰

حل سوالات باب نہم

س ۱ — فرض کرو کہ پ س ج = ا پس ج پ م = $\frac{1}{2}$ ا

اور پ ا م = $\frac{1}{2}$ ا

$$\text{پھر } \frac{\text{م ب}}{\text{پ م}} = \text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ا اور } \frac{\text{پ م}}{\text{ا م}} = \text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ا}$$

$$\text{پس مس}^2\, \tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{\text{م ب}}{\text{پ م}} \cdot \frac{\text{پ م}}{\text{ا م}} = \frac{\text{م ب}}{\text{ا م}} =$$

$$\frac{\text{م ب}}{\text{ا م}} = \frac{\text{س ب} - \text{س م}}{\text{س ا} + \text{س م}}$$

$$= \frac{\text{س پ} - \text{س م}}{\text{س پ} + \text{س م}} = \frac{1 - \frac{\text{س م}}{\text{س پ}}}{1 + \frac{\text{س م}}{\text{س پ}}} = \frac{1 - \text{جم ا}}{1 + \text{جم ا}}$$

س ۲ — $$\text{جم}\,\theta = \frac{\text{جم د} - \text{ب}}{1 - \text{ب جم د}} \quad \therefore \text{اسلئے}$$

$$\frac{1 - \text{جم}\,\theta}{1 + \text{جم}\,\theta} = \frac{1 - \text{ب جم د} - \text{جم د} + \text{ب}}{1 - \text{ب جم د} + \text{جم د} - \text{ب}} =$$

$$\frac{(1 + \text{ب})(1 - \text{جم د})}{(1 - \text{ب})(1 + \text{جم د})}$$

$$\therefore \text{مس}^2\, \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \text{ب}}{1 - \text{ب}}\, \text{مس}^2\, \frac{\text{د}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{مس}^2\, \frac{\theta}{2}}{1 + \text{ب}} = \frac{\text{مس}^2\, \frac{\text{د}}{2}}{1 - \text{ب}} \times$$

س ۳

$$\text{جم}\,2\theta = \frac{1}{1+\text{مس}^2\theta} = \frac{1}{1+2\,\text{مس}^2\text{و}+1} = \frac{1}{2(1+\text{مس}^2\text{و})}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\text{جم}^2\text{و} \quad \text{اور} \quad \text{جم}\,2\theta = 2\,\text{جم}^2\theta - 1 = \text{جم}^2\text{و} - 1 = -\text{جب}^2\text{و} \quad \therefore$$

$$\therefore\ \text{جم}\,2\theta + \text{جب}^2\text{و} = 0$$

س ۴

$$\text{قع}\,2\theta = 2\,\text{قع}\,\theta\,\text{قم}\,\theta \quad \therefore \quad \frac{1}{\text{جم}\,2\theta} = \frac{2}{\text{جم}\,\theta\,\text{جب}\,\theta}$$

$$\therefore\ 1 = \frac{2\,\text{جم}\,2\theta}{\text{جم}\,\theta\,\text{جب}\,\theta}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\text{جب}\,2\theta} = \frac{2\,\text{جم}\,2\theta}{\text{جب}\,2\theta\,\text{جم}\,\theta\,\text{جب}\,\theta} = \frac{\text{جم}\,2\theta}{\text{جب}^2\theta\,\text{جم}^2\theta}$$

$$= \frac{\text{جم}^2\theta - \text{جب}^2\theta}{\text{جب}^2\theta\,\text{جم}^2\theta} = \frac{1}{\text{جب}^2\theta} - \frac{1}{\text{جم}^2\theta}$$

$$\text{اسی طرح}\quad \text{قسم}\,2\theta = \text{قم}^2\theta - \text{قع}^2\theta$$

س ۵

$$\text{مس}(\theta-\text{و}) = \frac{\text{مس}\,\theta - \text{مس}\,\text{و}}{1+\text{مس}\,\theta\,\text{مس}\,\text{و}} = \frac{(\text{ن}-1)\,\text{مس}\,\text{و}}{1+\text{ن}\,\text{مس}^2\text{و}}$$

$$= \frac{\text{ن}-1}{\text{قم}\,\text{و} + \text{ن}\,\text{مس}\,\text{و}}$$

$$\therefore\ \text{مس}^2(\theta-\text{و}) = \frac{(\text{ن}-1)^2}{\text{قم}^2\text{و} + 2\text{ن} + \text{ن}^2\text{مس}^2\text{و}} = \frac{(\text{ن}-1)^2}{(\text{ن}\,\text{مس}\,\text{و} - \text{قم}\,\text{و})^2 + 4\text{ن}}$$

س ۶

جب θ + جب و - جم θ جب (θ + و)

= ۲ جب $\frac{1}{2}$ (θ + و) جم $\frac{1}{2}$ (θ - و) - ۲ جم θ جب $\frac{1}{2}$

(θ + و) جم $\frac{1}{2}$ (θ + و)

= ۲ جب $\frac{1}{2}$ (θ + و) {جم $\frac{1}{2}$ (θ - و) - جم θ جم $\frac{1}{2}$ (θ + و)}

= ۲ جب $\frac{1}{2}$ (θ + و) {جم (θ - $\frac{θ + و}{2}$) - جم θ

× جم $\frac{1}{2}$ (θ + و)} = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (θ + و) جب θ جب $\frac{1}{2}$ (θ

+ و) = ۲ جب θ جب² $\frac{1}{2}$ (θ + و) +

ش

$\frac{\text{جب ب جم ا (مس ا + مس ب)}}{\text{ا - جم (ا + ب)}}$ = $\frac{\text{جب ب جم ا}}{\text{۲ جب² } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب)}}$

{ $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}$ + $\frac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}$ }

= $\frac{\text{جب ب جم ا}}{\text{۲ جب² } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب)}}$ $\frac{\text{جب (ا + ب)}}{\text{جم ا جم ب}}$ =

= $\frac{\text{جب ب × ۲ جب } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب) جم } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب)}}{\text{۲ جب² } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب) جم ب}}$ =

$\frac{\text{جب ب جم } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب)}}{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب) جم ب}}$

اور $\frac{\text{جب ب جم } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب)}}{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب) جم ب}}$ + $\frac{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ (ا - ب)}}{\text{جب } \frac{1}{2} \text{ (ا + ب) جم ب}}$

$$= \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب}) + \text{جب ب جم}\,\frac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})}{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\ \text{جم ب}}$$

$$\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\ \text{جم ب}}{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{ا}+\text{ب})\ \text{جم ب}} = 1$$

س ۸ فرض کرو د = ارتفاع گزون کے پھر $\frac{\text{د}}{1760}$ = مس اَ

∴ د = ۱۷۶۰ مس اَ لیکن تقریباً قیمت مس اَ = پیمایش

دایرہ کی اَ یعنے $\frac{\pi}{60 \times 180}$ کے

∴ د = ۱۷۶۰ × $\frac{\pi}{60 \times 180}$ تقریباً ۔

س ۹ فرض کرو کہ د = فاصلہ انچون کے اسلئے $\frac{3'}{\text{د}}$ = مس $\frac{10}{4}$

$\frac{3}{\text{د}} = \frac{\pi}{4 \times 180}$ ∴ د = $\frac{180 \times 12}{\pi}$

س ۱۰ ۳ جب ا − ۴ جب^3 ا = ن جب ا جیسا کہ ہم خیال کرتے

ہین کہ ا نہ تو صفر ہے اور نہ دو زاویہ قائمون مین ضرب

کھایا ہوا ہے ہم اسکو جب ا پر تقسیم کرتے ہین اسطرح

۳ − ۴ جب^2 ا = ن ∴ جب^2 ا = $\frac{3-\text{ن}}{4}$ اور یہہ اوسر

عدد اور صفر کے درمیان واقع ہے اور ن واقع ۳ اور

−۱ کے درمیان اگر ن = ۲ کے ہو تو جب^2 ا = $\frac{1}{4}$ = جب^2

$\frac{\pi}{6}$ ∴ ا = م $\pi \pm \frac{\pi}{6}$ جہان م صفر یا کوئی دوسرا عدد

ہے ۔

س ۱۱

مس (ا - ب) = (مس ا - مس ب) / (ا + مس ا مس ب)

= (مس ا - (ن جب ا جم ا) / (ا - ن جب² ا)) / (ا + مس ا · (ن جب ا جم ا) / (ا - ن جب² ا))

= (جب ا (ا - ن جب² ا) - ن جب ا جم² ا) / (جم ا (ا - ن جب² ا) + ن جب² ا جم ا)

= (جب ا - ن جب ا) / جم ا = ((ا - ن) جب ا) / جم ا = (ا - ن) مس ا

س ۱۲

تمام زاویے جنکا ایک سا ہی جب ہوتا ہے جیسا کہ ۳ ۵ اس قاعدہ ن π + (-۱)ⁿ ۳ ۵ مین شامل ہین اسلیے کوئی مثال جسکی مس ۵ کی قیمت جب ۳ ۵ کی صورتین ویسا ہی تو امید کیجا سکتی ہے کہ ہر ایک زاویے کے مس کی قیمت قاعدہ مس ۱/۳ {ن π + (-۱)ⁿ ۳ ۵} معلوم ہو سکتی ہے
۶ م اور ۶ م + ۱ اور ۶ م + ۲ اور ۶ م + ۳ اور ۶ م + ۴

اور ۶ م + ۵ اصلی قیمت مس ۱/۳ {ن π + (-۱)ⁿ ۳ ۵}

بموجب دفعہ ۵۴ +

مس ۵ اور مس (π/۳ - ۵) اور مس (۲π/۳ + ۵) اور

مس (π - ۵) اور مس (π + π/۳ + ۵) اور مس

(π + ۲π/۳ - ۵) ہمکو اسیطرح ہم چھہ قیمتین دریافت

کر سکتے ہین بموجب دفعہ ۵۴ و ۱۰۵ اسیطرح پر

∓ مس θ اور ∓ مس (π/٣ + θ)

اور ∓ مس (٢π/٣ + θ)

س ١٤٣ جم٢ ا = ١/٢ (١ + جم ٢ ا) اسلئے

جم٤ ا = ١/٤ (١ + ٢ جم ٢ ا + جم٢ ٢ ا)

= ١/٤ + ١/٢ جم ٢ ا + (١ + جم ٤ ا)/٨

= ٣/٨ + ١/٢ جم ٢ ا + ١/٨ جم ٤ ا اسیطرح

جب٢ ا = ١/٢ (١ − جم ٢ ا)

∴ جب٤ ا = ١/٤ (١ − ٢ جم ٢ ا + جم٢ ٢ ا)

= ٣/٨ − ١/٢ جم ٢ ا + ١/٨ جم ٤ ا

∴ جم٨ ا + جب٨ ا

= (٣/٨ + ١/٢ جم ٢ ا + ١/٨ جم ٤ ا)٢ + (٣/٨ − ١/٢ جم ٢ ا + ١/٨ جم ٤ ا)٢

= ٢ {(٣/٨)٢ + (١/٢ جم ٢ ا)٢ + (١/٨ جم ٤ ا)٢ + ٢ · ٣/٨ × ١/٨ جم ٤ ا}

= ٢ {٩/٦٤ + ١/٤ جم٢ ٢ ا + ١/٦٤ جم٢ ٤ ا + ٣/٣٢ جم ٤ ا}

= ٩/٣٢ + ١/٤ (١ + جم ٤ ا) + ١/٦٤ (١ + جم ٨ ا) + ٣/١٦ جم ٤ ا

= ١/٦٤ {٣٥ + ٢٨ جم ٤ ا + جم ٨ ا}

س ١٤٤ جم θ جم د = −١ چونکہ جم کسی زاویہ کا شمار مین اکائی سے کبھی زیادہ نہیں

ہوتا اسلئے ضرور ہے کہ جم ۱ اور جم ب دونون شمارین اکائی کے برابر ہون اور ایک اونمین سے مثبت ہو اور دوسرا منفی اسلئے ان زاویون مین سے ایک زاویہ صفر ہونا چاہئے یا جفت ضعف π کا اور دوسرا طاق ضعف π کا

س ۱۵

جب^۲ ۱ + جب^۲ ب - ۲ جب ۱ جب ب جم (۱ - ب)

= جب ۱ {جب ۱ - جب ب جم (۱ - ب)} + جب ب {جب ب - جب ۱ جم (۱ - ب)}

= جب ۱ {جب (۱ - ب + ب) - جب ب جم (۱ - ب)}

+ جب ب {جب (۱ - ۱ - ب) - جب ۱ جم (۱ - ب)}

= جب ۱ جب (۱ - ب) جم ب - جب ب جم ۱ جب (۱ - ب)

= جب (۱ - ب) {جب ۱ جم ب - جب ب جم ۱} = جب^۲ (۱ - ب)

اسیطرح جب^۲ (۱ - ب) = ن^۲ جب^۲ (۱ + ب)

∴ جب (۱ - ب) = ∓ ن جب (۱ + ب)

∴ جب ۱ جم ب - جم ۱ جب ب = ∓ ن (جب ۱ جم ب + جم ۱ جب ب)

تقسیم کیا گیا جم ۱ جم ب سے اسیطرح مس ۱ - مس ب = ∓ ن (مس ۱ + مس ب)

∴ (۱ ∓ ن) مس ۱ = (۱ ∓ ن) مس ب

∴ مس ا = $\frac{1 \pm ن}{1 \mp ن}$ مس ب ∗

س ١٦ — جب ٤θ مم θ / جق ٢θ مم² ٢θ = جب ٤θ جب² ٢θ جم θ / (١ − جم ٤θ) جم² ٢θ جب θ

= ٢ جب³ ٢θ جم² ٢θ جم θ / ٢ جب³ θ جم² ٢θ = ٢ (٢ جب θ جم θ)³ جم θ / ٢ جب³ θ جم ٢θ = ٨ جم⁴ θ / جم ٢θ

اگر θ = ٠ تو اسکی قیمت ٨ ہے ∗

س ١٧ — جب θ + جم θ = √٢ ∴ جب θ/√٢ + جم θ/√٢ = ١

∴ جم (θ − π/٤) = ١ ∴ θ − π/٤ = ٢ ن π

س ١٨ — √٣ جب θ − جم θ = √٢ ∴ √٣/٢ جب θ − ½ جم θ

= ١/√٢

∴ ½ جم θ − √٣/٢ جب θ = − ١/√٢

∴ جم (θ + π/٣) = − ١/√٢ ∴ θ + π/٣ = ٢ ن π

± ٣π/٤ ∗

س ١٩ — جب ٢θ = جم θ ∴ جم (π/٢ − ٢θ) = جم θ ∴

π/٢ − ٢θ اور θ زاویے ہیں وہی جم رکھتے ہیں اسلیے

تمام زاوی شامل ہیں π/٢ − ٢θ = ٢ ن π ± θ

س ٢٠ — جم θ − جم ٢θ = جب ٣θ ∴ ٢ جب ٣θ/٢ جب θ/٢

= ٢ جب ٣θ/٢ جم ٣θ/٢

∴ جب $\frac{۳\theta}{۲}$ = ۰ اور جب $\frac{\theta}{۲}$ = جم $\frac{۳\theta}{۲}$

اگر جب $\frac{۳\theta}{۲}$ = ۰ اور پھر $\frac{۳\theta}{۲}$ = ن π

اگر جب $\frac{\theta}{۲}$ = جم $\frac{۳\theta}{۲}$ اور پھر جم $\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\theta}{۲}\right)$ = جم $\frac{۳\theta}{۲}$

اس لئے $\frac{\pi}{۲} - \frac{\theta}{۲}$ = ۲ ن $\pi \pm \frac{۳\theta}{۲}$

س ۲۱

(سہ − ماسہ) (قع θ + قم θ) =

۴ (جب θ مس θ + جم θ ظم θ)

∴ (سہ − ماسہ) $\left(\frac{۱}{\text{جم}\,\theta} + \frac{۱}{\text{جب}\,\theta}\right)$

= ۴ $\left(\frac{\text{جب}^۲\theta}{\text{جم}\,\theta} + \frac{\text{جم}^۲\theta}{\text{جب}\,\theta}\right)$

∴ (سہ − ماسہ) (جب θ + جم θ) = ۴ (جب$^۳\theta$ + جم$^۳\theta$)

= ۴ (جب θ + جم θ) (جب$^۲\theta$ + جم$^۲\theta$ − جب θ جم θ)

∴ یا جب θ + جم θ = ۰ یا (سہ − ماسہ) = ۴ (۱ − جب θ جم θ)

اگر جب θ + جم θ = ۰ اور پھر جب θ = − جم θ ∴ مس θ = −۱

∴ θ = ن $\pi + \frac{۳\pi}{۴}$

اگر سہ − ماسہ = ۴ (۱ − جب θ جم θ) اور پھر

ماسہ = ۴ جب θ جم θ = ۲ جب ۲θ

∴ جب ۲θ = √۳/۲ ∴ ۲θ = ن π + (−۱)^ن π/۳

س ۲۲ جب θ + جم θ = مس θ − θ۲ ∴ جم θ/جب θ − جب θ/جم θ

= جم θ + جب θ

∴ جم۲ θ − جب۲ θ = جب θ جم θ (جم θ + جب θ)

∴ یا جم θ + جب θ = ۰ یا جم θ − جب θ

= جب θ جم θ

اگر جب θ + جم θ = ۰ پھر جب θ = − جم θ

∴ مس θ = −۱

∴ θ = ن π + ۳π/۴

اگر جم θ − جب θ = جب θ جم θ تب مربع سے

۱ − ۲ جب θ جم θ = جب۲ θ جم۲ θ

∴ ۱ − جب ۲θ = جب۲ ۲θ/۴ *

س ۲۳ ۲ جب۲ θ + جب۲ ۲θ = ۲ ∴ جب ۲θ = ۲ − ۲

جب۲ θ = ۲ (۱ − جب۲ θ) ∴ پھر جب۲ θ جم۲ θ = ۲ جم۲ θ

∴ یا جم۲ θ = ۰ یا جب۲ θ = ۱/۲

اگر جم۲ θ = ۰ پھر θ = ن π + π/۲ اگر جب۲ θ = ۱/۲

تو جب۲ θ = جب۲ π/۴

* اس مساوات کے معمولی طور پر حل کرنے سے ہمکو جب ۲θ = −۲ ± ۲√۲ حاصل ہوتا ہے اسجگہہ اوپر کی علامت لینی چاہیے کیونکہ نیچے کی علامت سے جب ۲θ شمار میں اکائی سے بڑا ہو جائیگا *

$\therefore \theta = \text{ن}\,\pi \mp \frac{\pi}{3}$

س ٢٤

$\text{مس}\,\theta + 2\,\text{مم}\,2\theta = \text{جب}\,\theta\,(1 + \text{مس}\,\theta\,\text{مس}\,\frac{\theta}{2})$:

$\therefore \frac{\text{جب}\,\theta}{\text{جم}\,\theta} + \frac{2\,\text{جم}\,2\theta}{\text{جب}\,2\theta} = \text{جب}\,\theta\,(1 + \frac{\text{جب}\,\theta\,\text{جب}\,\frac{\theta}{2}}{\text{جم}\,\theta\,\text{جم}\,\frac{\theta}{2}})$

$\therefore \frac{\text{جب}^2\theta + \text{جم}\,2\theta}{\text{جب}\,\theta\,\text{جم}\,\theta} = \text{جب}\,\theta \cdot \frac{\text{جم}\,(\theta - \frac{\theta}{2})}{\text{جم}\,\theta\,\text{جم}\,\frac{\theta}{2}} = \frac{\text{جب}\,\theta}{\text{جم}\,\theta}$

$\therefore \text{جب}^2\theta + \text{جم}\,2\theta = \text{جب}^2\theta$ اسواسطے $\text{جم}\,2\theta =$

$\therefore 2\theta = \text{ن}\,\pi + \frac{\pi}{2}$

س ٢٥

$\therefore \text{جب}^2\,2\theta - \text{جب}^2\theta = \text{جب}^2\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$ $\therefore$

$\therefore 4\,\text{جب}^2\theta\,\text{جم}^2\theta - \text{جب}^2\theta = \frac{1}{4}$ $\therefore 4\,\text{جب}^2\theta\,(1 - \text{جب}^2\theta) -$

$\therefore 4\,\text{جب}^4\theta - 3\,\text{جب}^2\theta + \frac{1}{4} = 0$ عام طور سے حل

کرنے سے $\text{جب}^2\theta = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{8}$ اور پہلی طرف دیکھو کہ

$\text{جب}^2\theta = \text{جب}^2\,\frac{3\pi}{10}$

اور اس لئے $\theta = \text{ن}\,\pi \mp \frac{3\pi}{10}$ دوسری طرف دیکھو

$\text{جب}^2\theta = \text{جب}^2\,\frac{\pi}{10}$ $\therefore \theta = \text{ن}\,\pi \mp \frac{\pi}{10}$

س ٢٦

$\text{قم}\,\theta = \text{قم}\,\frac{\theta}{2}$ $\therefore \frac{1}{\text{جب}\,\theta} = \frac{1}{\text{جب}\,\frac{\theta}{2}}$

$\therefore \text{جب}\,\frac{\theta}{2} = \text{جب}\,\theta$ $\therefore \text{جب}\,\frac{\theta}{2} =$

$2\,\text{جب}\,\frac{\theta}{2}\,\text{جم}\,\frac{\theta}{2}$ ∴

∴ یا جب $\frac{\theta}{2}$ = ۰ یا جم $\frac{\theta}{2}$ = $\frac{1}{2}$

اگر جب $\frac{\theta}{2}$ = ۰ تو پھر $\frac{\theta}{2}$ = ن π

اگر جم $\frac{\theta}{2}$ = $\frac{1}{2}$ تو پھر $\frac{\theta}{2}$ = ۲ م $\pi \mp \frac{\pi}{3}$

ش ۲۷ جم θ جم ۳θ = جم ۵θ جم ۷θ ∴

∴ جم ۴θ + جم ۲θ = جم ۱۲θ + جم ۲θ

∴ جم ۴θ = جم ۱۲θ ∴ ۱۲θ = ۲ ن $\pi \mp$ ۴θ

اوپر کی علامت کے لینے سے ہمنے حاصل کیا θ = $\frac{۲ن\pi}{۸}$ = $\frac{ن\pi}{۴}$

اور نیچے کی علامت کے لینے سے θ = $\frac{۲ن\pi}{۱۶}$ = $\frac{ن\pi}{۸}$

مگر یہہ بات ظاہر ہے کہ پہلا جملہ دوسرے جملہ مین شامل ہے ٭

ش ۲۸ جب θ جب ۳θ = $\frac{1}{4}$

∴ جب θ (۳ جب θ − ۴ جب^3 θ) = $\frac{1}{4}$

∴ ۴ جب^4 θ − ۳ جب^2 θ + $\frac{1}{4}$ = ۰، عام طریقہ پر

حل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہین ٭

جب^2 θ = $\frac{3 \pm 1}{8}$ = $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{4}$ ٭

اگر جب^2 θ = $\frac{1}{2}$ تو جب^2 θ = جب^2 $\frac{\pi}{4}$

اور θ = ن $\pi \mp \frac{\pi}{4}$

اگر جب^2 θ = $\frac{1}{4}$ تو جب^2 θ = جب^2 $\frac{\pi}{6}$

اور θ = ن π ∓ $\frac{\pi}{٦}$

پانچوین فصل کی پانچوین مثال کو دیکھو +

س ٣٩ ٤ جب² θ + جب² ٢θ = ٣ ∴ ٤ جب² θ + ٤ جب² θ (١ - جب² θ) = ٣

∴ ٤ جب⁴ θ - ٨ جب² θ + ٣ = ٠ عام طور سے حل کرنے

سے ہم حاصل کرتے ہین +

جب² θ = $\frac{١}{٢}$ یا $\frac{٣}{٢}$ اور پچھلی قیمت صرف بیفایدہ ہے اسیطرح

جب² θ = جب² $\frac{\pi}{٤}$

∴ θ = ن π ∓ $\frac{\pi}{٤}$

س ٤٠ (١ - مس θ) (١ + جب ٢θ) = ١ + مس θ

اور اسلئے (١ - $\frac{جب θ}{جم θ}$) (جب θ + جم θ)² = ١ + $\frac{جب θ}{جم θ}$

∴ (جم θ - جب θ) (جم θ + جب θ)² = جم θ + جب θ

∴ یا جم θ + جب θ = ٠

اور یا (جم θ - جب θ) (جم θ + جب θ) = ١

اگر جم θ + جب θ = ٠ تو جب θ = - جم θ

∴ مس θ = -١ ∴ θ = ن π + $\frac{٣\pi}{٤}$

اگر (جم θ - جب θ) (جم θ + جب θ) = ١ یعنی

جم۲ θ − جب۲ = ۱

∴ جم ۲θ = ۱ ∴ ۲θ = ۲ن π +

جب θ + جب ۲θ + جب ۳θ + جب ۴θ = ۰ س ۳۱

∴ جب θ + جب ۴θ + جب ۲θ + جب ۳θ = ۰

∴ ۲ جب $\frac{۵θ}{۲}$ جم $\frac{۳θ}{۲}$ + ۲ جب $\frac{۵θ}{۲}$ جم $\frac{θ}{۲}$ = ۰

∴ ۲ جب $\frac{۵θ}{۲}$ (جم $\frac{۳θ}{۲}$ + جم $\frac{θ}{۲}$) = ۰

∴ ۴ جب $\frac{۵θ}{۲}$ جم $\frac{θ}{۲}$ جم θ = ۰

اسیطرح یہان تین حالتین ہین اگر جب $\frac{۵θ}{۲}$ = ۰

تو $\frac{۵θ}{۲}$ = ن π

اگر جم $\frac{θ}{۲}$ = ۰ تو $\frac{θ}{۲}$ = ن π + $\frac{π}{۲}$

اگر جم θ = ۰ تو θ = ن π + $\frac{π}{۲}$

جب θ − جم θ = ۴ جب θ جم۲ θ س ۳۲

∴ جب θ − ۴ جب θ (۱ − جب۲ θ) = جم θ

∴ ۴ جب۳ θ − ۳ جب θ = جم θ

∴ جم θ = − جب ۳θ = جم (۳θ + $\frac{π}{۲}$)

∴ ۳θ + $\frac{π}{۲}$ = ۲ن π ± θ

(مم θ − مس θ)۲ (۲ − ماس) = ۴ (۲ + ماس) س ۳۳

$$\therefore \left(\frac{\text{جم}\,\theta}{\text{جب}\,\theta} - \frac{\text{جب}\,\theta}{\text{جم}\,\theta}\right)^{۲} = \frac{۴(۲+\sqrt{۳})}{۲-\sqrt{۳}}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{جم}^{۲}\theta - \text{جب}^{۲}\theta}{۲\,\text{جب}\,\theta\,\text{جم}\,\theta}\right)^{۲} = \frac{۲+\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۳}} = \frac{(۲+\sqrt{۳})^{۲}}{(۲+\sqrt{۳})(۲-\sqrt{۳})}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{جم}\,۲\theta}{\text{جب}\,۲\theta}\right)^{۲} = (۲+\sqrt{۳})^{۲}$$

$$\therefore \text{مم}^{۲}\,۲\theta = \text{مم}^{۲}\,\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\therefore ۲\theta = \text{ن}\,\pi \pm \frac{\pi}{۱۲}$$

س ۴۳

$$۲\sqrt{۲}\,\text{جم}\left(\frac{\pi}{۴} - \theta\right)(۱ + \text{جب}\,\theta) = ۱ + \text{جم}\,۲\theta$$

$$\therefore ۲\sqrt{۲}\,\text{جم}\left(\frac{\pi}{۴} - \theta\right)(۱ + \text{جب}\,\theta) = ۲\,\text{جم}^{۲}\,\theta$$

$$= ۲(۱ - \text{جب}^{۲}\,\theta)$$

$$\therefore \text{یا}\ ۱ + \text{جب}\,\theta = ۰\ \text{یا}\ \sqrt{۲}\,\text{جم}\left(\frac{\pi}{۴} - \theta\right) = ۱ - \text{جب}\,\theta$$

اگر $۱ + \text{جب}\,\theta = ۰$ تو $\text{جب}\,\theta = -۱$

$$\therefore \theta = \text{ن}\,\pi + (-۱)^{\text{ن}}\,\frac{۳\pi}{۲}$$

جو کہ بہ ظاہر برابر ہے $(۴\text{م} + ۳)\,\frac{\pi}{۲}$

اگر $\sqrt{۲}\,\text{جم}\left(\frac{\pi}{۴} - \theta\right) = ۱ - \text{جب}\,\theta$

تو ما۲ (ما ۱/۲ جم θ + ما ۱/۲ جب θ) = ا جب θ

∴ ۲ جب θ = ۱ − جم θ

∴ ۴ جب θ/۲ جم θ/۲ = ۲ جب² θ/۲ ∴ یا جب θ/۲ = ۰ یا مس θ/۲ = ۲

اگر جب θ/۲ = ۰ تو θ/۲ = ن π اگر مس θ/۲ = ۲

تو θ/۲ = ن π + ا

جہاں کہ ایسا ا ہے کہ مس ا = ۲

جب ۹θ + جب ۵θ + ۲ جب² θ = ۱ س ۳۵

∴ ۲ جب ۷θ جم ۲θ = ۱ − ۲ جب² θ = جم ۲θ

∴ یا جم ۲θ = ۰ یا جب ۷θ = ۱/۲

اگر جم ۲θ = ۰ تو ۲θ = ن π + π/۲

اگر جب ۷θ = ۱/۲ تو ۷θ = ن π + (−۱)^ن π/۶ ✤

باب دہم

س١ فرض کرو کہ و = لوکارثم اسلئے

$١٢٨ = (٢\sqrt{٢})^{و}$ یعنی $٢^{٧} = ٢^{\frac{٣و}{٢}}$

∴ $\frac{٣و}{٢} = ٧$ ∴ $و = \frac{١٤}{٣}$

س٢ فرض کرو کہ و = لوکارثم تو اسلئے

$٢٤٣ \sqrt[٣]{٩} = (\sqrt{٣})^{و}$ یعنی $٣^{٥} \cdot ٣^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{\frac{و}{٢}}$ یعنی

$٥ + \frac{٢}{٣} = \frac{و}{٢}$

اسلئے $\frac{و}{٢} = \frac{١٧}{٣}$ ∴ $و = \frac{٣٤}{٣}$

س٣ فرض کرو کہ و = لوکارثم ٢١٨٧ لوگ تو $٢١٨٧ = ٣^{و}$

یعنی $٣^{٧} = ٣^{و}$ ∴ و = ٧

فرض کرو کہ و = ٠٠٠١، $لوگ_{١٠}$ تو $٠٠٠١، = ١٠^{و}$

یعنی $\frac{١}{١٠^{٣}} = ١٠^{و}$ یعنی $١٠^{-٣} = ١٠^{و}$ یعنی و = -٣

فرض کرو کہ و = جم $\sqrt[٥]{٤}$ $لوگ_{٢}$ تو جم $\sqrt[٥]{٤} = ٢^{و}$

یعنی $\frac{١}{\sqrt{٢}} = ٢^{و}$ یعنی $٢^{-\frac{١}{٢}} = ٢^{و}$ ∴ $و = -\frac{١}{٢}$ ❊

س٤ $٥^{٦-٣و} = ٥^{\frac{و}{٢}+٣}$ ∴ $(٦ - ٣و)$ $لوگ_{٥}$ $= (\frac{و}{٢} + ٣)$

لوگ ۲ -

∴ (۲ − ۳ و) لوگ ۲ = (و + ۳) لوگ ۲ ½

∴ (۲ − ۳ و) (۱ − لوگ ۲) = (و + ۳) لوگ ۲

∴ و (۳ − ۳ لوگ ۲) = ۲ − ۹ لوگ ۲ ∴ و = (۲ − ۹ لوگ ۲) / (۳ − ۳ لوگ ۲)

= ۳٫۲۹۰۷۳ / ۳٫۰۹۶۹۱ = ۱٫۰۶ ...

س ۵ — اسلئے فرض کرو کہ ا = ۳۲۲٫ لوگ = لوگ ۲۲۴/۱۰۰۰

= لوگ ۳۲۲۷/۱۰۰۰

= لوگ ۷ + ۵ لوگ ۲ − ۳

اور ب = لوگ ۱۲۵ = لوگ ۱۰۰۰/۸

= ۳ − ۳ لوگ ۲

دوسرے درجہ کی مساوات سے لوگ ۲ = ⅓ (۳ − ب)

پہلے درجہ کی مساوات سے

لوگ ۷ = ا + ۳ − ۵/۳ (۳ − ب)

س ۶ — ۲۲۵ واقع ہے درمیان ۲^۳ اور ۲^۴ کے اور اس لئے

لوکارثم ۲۲۵ کا تا بعدہ ۱ اور ۳ ہے تب لوگ

(۱۰٫۲۲۵)^{⅕} = ⅕ لوگ ۱۰٫۲۲۵ = ⅕ لوگ ۷۲۵/۱۰۰۰۰

اور $\frac{۷۲۵}{۱۰۰۰۰}$ اور $\frac{۱}{۳۶}$ اور $\frac{۱}{۶}$ کے درمیان واقع ہے ÷

یعنے درمیان $۶^{-۱}$ اور $۶^{-۲}$

اور $\frac{۱}{۵}$ لوگ $\frac{۷۲۵}{۱۰۰۰۰}$ اسکا قاعدہ ۶ واقع ہے

درمیان $-\frac{۱}{۵}$ اور $-\frac{۲}{۵}$ کے اور اسطرح سے جزو صحیح

-۱ ہوگا اور فرض کرنے سے کسر عشاریہ لوگارثم کا ساوی

ہوگا ÷

س | لوگ ۵.۰۴ = لوگ (۸۱ × ۵) = لوگ $(۸۱ \times \frac{۱۰}{۲})$

$= \text{لوگ}\ \frac{۳^۴ \times ۱۰}{۲}$

= ۴ لوگ ۳ + ۱ - لوگ ۲

∴ ۴ لوگ ۳ = لوگ ۵.۰۴ + لوگ ۲ - ۱ =

۸۱۹۰۸۴۰۵

∴ لوگ ۳ = ۱۲۱۲۷۷۴۶

ش | لوگ ۹۸ = لوگ (۲×۷^۲) = لوگ ۲ + ۲ لوگ ۷

= ۳۰۱۰۳۰. + ۱.۶۹۰۱۹۶ = ۱.۹۹۱۲۲۶

لوگ $\left(\frac{۴}{۳ \sqrt[۳]{۴}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ = $\frac{۱}{۲}$ لوگ $\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{۴}}$ = $\frac{۱}{۲}$ لوگ

$\frac{۴^{\frac{۲}{۳}}}{۳}$ = $\frac{۱}{۲}$ (۲ لوگ ۲ - ۳ لوگ ۷)

س ٩

= −٧١٦٦٦٩؍ = ٣٫٣٣٣٣٠؍ آ

لوگ (٠٫٠٠٢٠٧٣٦)^(١/٣) = ١/٣ لوگ (٠٫٠٠٢٠٧٣٦) =

= ١/٣ لوگ (٢٠٧٣٦ / ١٠^٧) = ١/٣ لوگ (٢^٨ × ٣^٤ / ١٠^٧) =

١/٣ {٤ لوگ ٣ + ٨ لوگ ٢ − ٧} = −٣٤٤٤٨٩؍

= ١؍١٠٥٥٧

س ١٠

٢/|٣ = ١/|٢ − ١/|٣ و ٤/|٥ = ١/|٤ − ١/|٥ و ٦/|٧ = ١/|٦ − ١/|٧ یہی سلسلہ =

١/|٢ − ١/|٣ + ١/|٤ − ١/|٥ + ... = ی^(−١)

س ١١

١/|٢ = ١/٢ · ١٫٢/|٢ = ١/٢

اور (٢+١)/|٣ = ١/٢ · ٣٫٢/|٣ = ١/٢ · ١/|١

(٣+٢+١)/|٤ = ١/٢ · ٤٫٣/|٤ = ١/٢ · ١/|٢

(٤+٣+٢+١)/|٥ = ١/٢ · ٥٫٤/|٥ = ١/٢ · ١/|٣

اور عموماً (١+٢+٣+٣...+ن)/|ن+١ = ١/٢ · ن(ن+١)/|ن+١

= ١/٢ · ١/|ن−١

اور اسیطرح سے یہہ سلسلہ

= ١/٢ {١ + ١/|١ + ١/|٢ + ١/|٣ + ...} = ی/٢

س ١٢

٤ جب و جب (و − ۹) = ٢ جم ۹ − ١

∴ ٢ {جم ۹ − جم (٢و − ۹)} = ٢ جم ۹ − ١

∴ جم (٢و − ۹) = ١/٢ ∴ ٢و − ۹ = ٢ن π ± π/٣

س ۱۳

جم ب √(ا^۲ − د^۲) = د جب ب − ا جب ا

∴ جم^۲ ب (ا^۲ − د^۲) = د^۲ جب^۲ ب − ۲ د ا

جب ب جب ا + ا^۲ جب^۲ ا

∴ د^۲ − ۲ د ا جب ب جب ا = ا^۲ جم^۲ ب − ا^۲

جب^۲ ا

∴ (د − ا جب ب جب ا)^۲ = ا^۲ جم^۲ ب − ا^۲ جب^۲

ا + ا^۲ جب^۲ ب جب^۲ ا = ا^۲ جم^۲ ب − ا^۲ جب^۲ ا

جم^۲ ب = ا^۲ جم^۲ ب جم^۲ ا

∴ د − ا جب ب جب ا = ± ا جم ب جم ا

∴ د = ا (جب ب جب ا ± جم ب جم ا) = ا جم (ب − ا)

یا − ا جم (ب + ا)

س ۱۴

جب ا + جب (د − ا) + جب (۲ د + ا) = جب

(د + ا) + جب (۲ د − ا)

∴ جب ا = جب (د + ا) − جب (د − ا) + جب

(۲ د − ا) − جب (۲ د + ا)

= ۲ جب ا جم د − ۲ جب ا جم ۲ د

∴ ا = ۲ جم د − ۲ جم ۲ د = ۲ جم د − ۲ (۲ جم^۲ د − ۱)

∴ ۴ جب² د - ۲ جم د - ۱ = ۰ عام طریقہ پر حل کرنے

سے ہم حاصل کرتے ہین جم د = (۱ ± √۵) / ۴

اوپر کی علامت لیکر ہمنے جم د = جم π/۵ اور اسلئے د = ۲ ن π ± π/۵

اور نیچے کی علامت لینے سے جم د = جم ۳π/۵ اور اسلئے د =

۲ ن π ± ۳π/۵ ⁘

س ۱۵

جم (د + ۳/۴) ا + جم (د + ۱/۴) ا جب ا

∴ ۲ جم (د + ۱) ا جم ½ ا = جب ا = ۲ جب ½ ا

جم ½ ا

∴ جم (د + ۱) ا = جب ½ ا = جم (π/۲ - ½ ا)

اسجگہ تمام مثالین شامل رکھتے ہین خطوط وحدانی (د + ۱) ا

= (۲ ن π ± (π/۲ - ½ ا)

س ۱۶

∴ د² جم ا جم (ا - ب/۲) + د جم (ا - ب) = ۲ جم ب/۲

∴ د² + د جم (ا - ب) / جم ا جم (ا - ب/۲) = ۲ جم ب/۲ / جم ا جم (ا - ب/۲)

∴ {د + جم (ا - ب) / ۲ جم ا جم (ا - ب/۲)}² = ۲ جم ب/۲ / جم ا جم (ا - ب/۲) +

جم² (ا - ب) / ۴ جم² ا جم² (ا - ب/۲)

= جم۲ (۱ - ب) + ۸ جم ۱ جم ب/۲ جم (۱ - ب/۲) / ۴ جم ۱۲ جم۲ (۱ - ب/۲) =

= جم۲ (۱ - ب) + ۴ جم ۱ {جم ۱ + جم (۱ - ب)} / ۴ جم ۱۲ جم۲ (۱ - ب/۲)

= {جم (۱ - ب) + ۲ جم ۱}۲ / ۴ جم ۱۲ جم۲ (۱ - ب/۲)

∴ و + جم (۱ - ب) / ۲ جم ۱ جم (۱ - ب/۲) = ± جم (۱ - ب) + ۲ جم ۱ / ۲ جم ۱ جم (۱ - ب/۲)

اور اوپر کے علامت لینے سے و = ۲ جم ۱ / ۲ جم ۱ جم (۱ - ب/۲) = قع (۱ - ب/۲)

اور نیچے کی علامت لینے سے و = - جم ۱ + جم (۱ - ب) / جم ۱ جم (۱ - ب/۲)

= - ۲ جم (۱ - ب/۲) جم ب/۲ / جم ۱ جم (۱ - ب/۲) = - ۲ جم ب/۲ قع ۱ مساوات سے

حل کرنے سے +

و جم ۱ {و جم (۱ - ب/۲) - ۱} + ۲ {و جم (۱ - ب/۲) - ۱}

جم ب/۲ = ۰

اور یہہ واضح ہے کہ دونون قیمتین و کی ظاہر ہین +

س ۱۷ مم ۲ و-۱ ۱ - مم ۲ و ۱ = قم ۳ ۱ اور فرض کرو کہ

ی = ۲ و-۱ ۱ اور اسطرح مم ی - مم ۲ ی = قم ۳ ۱

∴ جم ی/جب ی − جم ۲ی/جب ۲ی = قم ۳ا

∴ جب (۲ی − ی)/جب ی جب ۲ی = قم ۳ا = ۱/جب ۳ا

∴ جب ۲ی = جب ۳ا یعنے جب ۲ی ا = جب ۳ا

عموماً ۲ی ا = ن π + (−۱)^ن ۳ا

س ۱۸ م جتی θ = ن جتی (ا − θ)

∴ م (۱ − جم θ) = ن {۱ − جم (ا − θ)}

∴ ۲ م جب² θ/۲ = ۲ ن جب² (ا − θ)/۲

∴ جب (ا − θ)/۲ = {م/ن}^½ جب θ/۲

∴ جب ا/۲ جم θ/۲ − جم ا/۲ جب θ/۲ = (م/ن)^½ جب θ/۲ تقسیم کرو جم θ/۲ پر تو اِسلئے مساوات سادہ سے مس θ/۲ کے برابر ہم حاصل کرتے ہین ◆

س ۱۹ جم ن θ + جم (ن − ۲) θ = جم θ

∴ ۲ جم (ن − ۱) θ جم θ = جم θ ∴ یا جم θ = ۰ یا جم (ن − ۱) θ = ½

اگر جم θ = ۰ تو θ = م π + π/۲

اگر جم (ن − ۱) θ = ½ تو (ن − ۱) θ = ۲ م π ± π/۳

س ۲۰	جب θ + جب ۳θ = جب ۲θ + جب ۴θ ∴ ۲ جب ۲θ جم θ = ۲ جب ۳θ جم θ ∴ یا جم θ = ۰ یا جب ۲θ = جب ۳θ اگر جم θ = ۰ تو θ = ن π + π/۲ اگر جب ۲θ = جب ۳θ اور جب ۲θ - جب ۳θ = ۰ ∴ ۲ جب θ/۲ جم θ/۲ = ۰ ∴ جب θ/۲ = ۰ یا جم ۵θ/۲ = ۰ اگر جب θ/۲ = ۰ تو θ/۲ = ن π اگر جم ۵θ/۲ = ۰ تو ۵θ/۲ = ن π + π/۲ سات قیمتین جو کہ صفر سے بڑی ہین اور ۲π سے کم ہین وہ یہہ ہین ؛ π/۵ اور ۳π/۵ اور ۵π/۵ اور ۷π/۵ اور ۹π/۵ اور π/۲ اور ۳π/۲
س ۲۱	مس و = مس ب مس (و + 1) = مس ب (مس و + مس 1) / (1 - مس و مس 1) ∴ مس و (۱ - مس و مس 1) = مس ب (مس و + مس 1) ∴ مس² و مس 1 + (مس ب - ۱) مس و + مس 1 مس ب = ۰ (مس ب - ۱)² - ۴ مس² 1 مس ب = ۰

اور $(\text{مس ب} - ۱)^۲ - ۴\,\text{مس}^۲\,\text{ا}\,\text{مس ب} = \text{مس}^۲\,\text{ب} -$

$۲\,\text{مس ب} - ۴\,\text{مس}^۲\,\text{ا}\,\text{مس ب} + ۱$

$= \left\{\text{مس ب} - (۱ + ۲\,\text{مس}^۲\,\text{ا})\right\}^۲ + ۱ - (۱ + ۲\,\text{مس}^۲\,\text{ا})^۲$

$$= \left\{\text{مس ب} - \frac{۱ + \text{جب}^۲\,\text{ا}}{\text{جم}^۲\,\text{ا}}\right\}^۲ - \frac{۴\,\text{جب}^۲\,\text{ا}}{\text{جم}^۴\,\text{ا}} =$$

$$\left\{\text{مس ب} - \frac{۱ + \text{جب}^۲\,\text{ا}}{\text{جم}^۲\,\text{ا}} - \frac{۲\,\text{جب ا}}{\text{جم}^۲\,\text{ا}}\right\}$$

$$\times \left\{\text{مس ب} - \frac{۱ + \text{جب}^۲\,\text{ا}}{\text{جم}^۲\,\text{ا}} + \frac{۲\,\text{جب ا}}{\text{جم}^۲\,\text{ا}}\right\}$$

$$= \left\{\text{مس ب} - \left(\frac{۱ + \text{جب ا}}{\text{جم ا}}\right)^۲\right\}\left\{\text{مس ب} - \left(\frac{۱ - \text{جب ا}}{\text{جم ا}}\right)^۲\right\}$$

اسکا جواب = ۰ کے ہوگا

اور اسلئے مس ب درمیان $\left(\frac{۱ - \text{جب ا}}{\text{جم ا}}\right)^۲$ اور

$\left(\frac{۱ + \text{جب ا}}{\text{جم ا}}\right)^۲$ واقع نہیں ہے ۔

مس ۲۲ $\text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} - \theta\right) + \text{مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \theta\right)$

$$= \frac{\text{جب}(\theta - \frac{\pi}{4})}{\text{جم}(\theta - \frac{\pi}{4})} + \frac{\text{جب}(\theta + \frac{\pi}{4})}{\text{جم}(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{\text{جب}(\theta - \frac{\pi}{4})\,\text{جم}(\theta + \frac{\pi}{4}) + \text{جب}(\theta + \frac{\pi}{4})\,\text{جم}(\theta - \frac{\pi}{4})}{\text{جم}(\theta - \frac{\pi}{4})\,\text{جم}(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\frac{\pi}{2}}{\text{جم}(\theta - \frac{\pi}{4})\,\text{جم}(\theta + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\text{جب}(\frac{\pi}{4} + \theta)\,\text{جم}(\frac{\pi}{4} + \theta)}$$

$$= \frac{2}{\text{جب}(2\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\text{جم}\,2\theta}$$

اسلئے $\frac{2}{\text{جم}\,2\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$

$\therefore \frac{\text{جم}\,2\theta}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{3}}\right)$

$\therefore \text{جم}\,2\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$

$\therefore 2\,\text{جم}^2\,2\theta - 1 = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \text{جم}\,4\theta = \frac{1}{2} = \text{جم}\,\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta$ کی اخیر قیمت دیگئی اسلئے $4\theta = \frac{\pi}{3}$

$\text{جب}^2(\text{ن}+1)\theta = \text{جب}^2\,\text{ن}\,\theta + \text{جب}^2(\text{ن}-1)\theta$ س ۴۳

$\therefore \text{جب}^2(\text{ن}+1)\theta - \text{جب}^2(\text{ن}-1)\theta = \text{جب}^2\,\text{ن}\,\theta$

$\therefore \text{جب}\,2\text{ن}\,\theta\;\text{جب}\,2\theta = \text{جب}^2\,\text{ن}\,\theta$ بموجب دفعہ ۸۳

۰ (ن + ۱) θ + (ن + ۱) θ + ن θ = π

∴ ۳ ن θ = π اور ن θ = π/۳ ∴ جب ۲ θ

جب ۲π/۳ = جب π/۳ ∴ جب ۲ θ =

جب π/۳ اسیطرح ۲ θ = π/۳ اور θ =

π/۹ لیکن ن θ = π/۳ ∴ ن = ۲

س ۲۴

جم^۴ θ − جم^۴ ا = ۲ جم^۳ θ (جم θ − جم ا) −

۲ جب^۳ θ (جب θ − جب ا)

∴ جم^۲ ۲ θ − جم^۲ ا = (جم ۳ θ + ۳ جم θ)/۲ (جم θ − جم ا)

(۳ جب θ − جب ۳ θ)/۲ (جب θ − جب ا)

∴ ۲ (جم^۲ ۲ θ − جم^۲ ا) = جم ۳ θ جم θ + جب ۳ θ

جب θ − جم ۳ θ جم ا − جب ۳ θ جب ا

+ ۳ جم^۲ θ − ۳ جب^۲ θ − ۳ جم θ جم ا + ۳

جب θ جب ا

∴ جم (۳ θ − θ) − جم (۳ θ − ا) − ۳ جم (θ + ا)

= ۳ جب^۲ θ − جم^۲ θ − ۲ جم^۲ ا

∴ جم ۲ θ − جم (۳ θ − ا) − ۳ جم (θ + ا) = −۳

۳ جم ۲ θ − ۲ جم^۲ ا

= ۳ − ۲ (۱ + جم ۲θ) − (۱ + جم ۲ا)

= −۲ جم ۲θ − جم ۲ا

∴ ۳ جم ۲θ − ۳ جم (θ + ا) − جم (۳θ − ا) +

جم ۲ا = ۰

∴ ۴ جب (۳θ + ا)/۲ جب (θ − ا)/۲ + جب (۳θ + ا)/۲

جب (۳θ − ۳ا)/۲ = ۰

∴ جب (۳θ + ا)/۲ {جب (۳(θ − ا))/۲ − ۳ جب (θ − ا)/۲} = ۰

∴ ۴ جب (۳θ + ا)/۲ جب³ (θ − ا)/۲ = ۰

اسجگہہ یا جب (۳θ + ا)/۲ = ۰ یا جب (θ − ا)/۲ = ۰

پہلے دیا ہوا (۳θ + ا)/۲ = ن π اور دوسرا دیا ہوا

= (θ − ا)/۲ = ن π

θ ظاہر کرتا ہے اوس زاویہ کو جسپر نشان ا کا ہے س ۲۵

پس جب θ = جب ا اسیطرح جم (θ − π/۲)

= جم (π/۲ − ا) ∴ تمام مثالین

مقابلہ کی گئی ہین θ − π/۲ = ۲ن π ∓ (π/۲ − ا)

θ نشان ظاہر کرتا ہے اوس زاویہ کو جسپر نشان س ۲۶

۱ کا ہے

پس جم θ = جم ۱ اسیطرح جب $(\theta - \frac{\pi}{۲})$ = جب

$(۱ - \frac{\pi}{۲})$ اسیطرح سے تمام رقمین مقابلہ کی گئی ہین

$\theta - \frac{\pi}{۲} = ن\,\pi + (-۱)^{ن} (۱ - \frac{\pi}{۲})$

۱۰۱ دفعہ کے بموجب ظاہر کرتا ہے کہ اوپر کے علامت لینی چاہیے مش ۲۷

اگر $\frac{۱}{۲}$ واقع ہو درمیان ن ۳۶۰° + ۲۲۵° اور

ن ۳۶۰° + ۴۰۵° ہو اس حالت مین ۱ واقع ہے

درمیان ۲ ن ۳۶۰° + ۴۵۰° اور ۲ ن ۳۶۰° + ۸۱۰° اور

۱ + ۲۷۰° واقع ہے درمیان ۲ ن ۳۶۰° + ۷۲۰°

اور ۲ ن ۳۶۰° + ۱۰۸۰° اور اسلئے $\frac{۱ + ۲۷۰°}{۳۶۰°}$

واقع ہین درمیان ۲ ن + ۲ اور ۲ ن + ۳ کے

اسلئے معلوم ہوا کہ اس کسر کا صحیح حصہ صرف تعدادی ہو نہیں اسکی قیمت م مقرر ہے

فرض کرو کہ ۱ مین جتنی تعداد درجون کی ہے وہ واقع ہو درمیان ن مش ۲۸

۳۶۰ اور ن ۳۶۰ + ۹۰ تو مس ۱ اور مس $\frac{۱}{۲}$

دونون مثبت ہین اور اسلئے اوپر کی علامت کی دونون

حالتین ہوسکتی ہین +

نیز اس حالت مین $\frac{۹۰ + ۱}{۱۸۰}$ واقع ہے درمیان $\frac{۹۰ + ۳۶۰ ن}{۱۸۰}$

حل کرنے سے ہمکو یہہ شکل حاصل ہوتی $(-۱)^{م}$

بعینہ اسی طریقہ سے ہم معلوم کرتے ہین کہ یہہ مثال دفعہ ۱۰۱ سے ملتی ہے جبکہ التعین کہ م طاق ہو

اور $\frac{\text{ن}\,۳۶۰+۱۸۰}{۱۸۰}$

یعنے واقع ہے درمیان ۲ ن + $\frac{۱}{۲}$ اور ۲ ن + ۱ کے

پس اس سے معلوم ہوا کہ م مثبت ہو اب یہہ فرضکرو کہ ا مین درجونکی تعداد

درمیان ۳۶۰ ن + ۹۰ اور ن ۳۶۰ + ۱۸۰ کے ہے *

اس حالتمین مس ا مقدار منفی ہوگا اور مس $\frac{ا}{۲}$ صحیح اور مثبت اسلئے نیچے کی علامت کو اشتباہ مین رکہنا چاہئے اور نیز اسی حالتمین $\frac{ا±۹۰}{۱۸۰}$ درمیان ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے واقع ہو پس اسطرح سوم کی قیمت طاق ہوگی - اور اسیطرح ہم آگے اور عمل کر سکتے ہین اگر ا مین درجونکی تعداد ن ۳۶۰ + ۱۸۰ اور ن ۳۶۰ + ۲۷۰ کے درمیان یا ن ۳۶۰ + ۲۷۰ اور ن ۳۶۰ + ۳۶۰ کے درمیان واقع ہو[۴۵]

س ۲۹

اگر مس (مم د) = مم (مس د) اسلئے مس (مم د)

= مس $\{\frac{\pi}{۲}$ - مس د$\}$

∴ دفعہ ۶۰ کی بموجب وہ سوال جنکا حل ہونا ممکن ہے وہ تمام اس شکل مین آسکتے ہین

مم د = ن π + $\frac{\pi}{۲}$ - مس د

∴ مم د + مس د = ن π + $\frac{\pi}{۲}$

∴ $\frac{\text{جم د}}{\text{جب د}}$ + $\frac{\text{جب د}}{\text{جم د}}$ = ن π + $\frac{\pi}{۲}$

∴ $\frac{۱}{\text{جب د جم د}}$ = $\frac{\pi(۲\text{ن}+۱)}{۲}$

∴ جب د جم د = $\frac{۲}{\pi(۲\text{ن}+۱)}$

∴ جب ۲ د = $\frac{۴}{\pi(۲\text{ن}+۱)}$ قیمت ن کی = ۱-

* مس $\frac{ا}{۲}$ = $\frac{\text{جب ا}}{\text{۱+جم ا}}$ = $\frac{\text{۱-جم ا}}{\text{جب ا}}$ اسلئے جو اشتباہ کہ ± ۱+ مس ا مین ہے وہ ...

ان دونون سے کوئی علامت ... (۱-) کی ... آسان ہے ...

۴۵ معلوم ہوا کہ اس مثال اور آئندہ مثال مین کسی شکل مین بڑی بڑی کسر سے وہ کسر مراد ہوتی ہے جو کہ ایک مثبت کسر کے ساتہہ بلکہ تمام سوال کو بناتی ہے - یا ہم مثال کو اسطرح بیان کرسکتے ہین

$\pm\sqrt{\text{۱+مس}^۲\text{ ا}} = \pm\frac{۱}{\sqrt{\text{جم}^۲\text{ ا}}} = \pm\frac{۱}{\text{جم ا}}$ *

جو کہ بناتا ہے جب ۲ و بڑھی بہ نسبت ایک عدد واحد کے

س ۳۰

۲ جم² ½ ا = ۱ + جم ا

∴ ۴ جم² ½ ا = ۲ + ۲ جم ا

∴ ۲ جم ½ ا = √(۲ + ۲ جم ا)

∴ پھر ۲ جم² ¼ ا = ۱ + جم ½ ا

∴ ۴ جم² ¼ ا = ۲ + ۲ جم ½ ا

∴ ۲ جم ¼ ا = √(۲ + ۲ جم ½ ا) = {۲ + (۲ + ۲ جم ا)^½}^½

اسیطرح ۲ جم ⅛ ا = [۲ + {۲ + (۲ + ۲ جم ا)^½}^½]^½

س ۳۱

و کو اسکے ساتھ بدلو π/۴ − و اور π/۴ + و اسطرح پر

جم (π/۴ − و) = ± √(½ {۱ + جم (π/۲ − ۲ و)}) = ± √((۱ + جب ۲ و)/۲)

اور جم (π/۴ + و) = ± √(½ {۱ + جم (π/۲ + ۲ و)}) = ± √((۱ − جب ۲ و)/۲)

تب جم (π/۴ − و) اور جم (π/۴ + و) ان کی قیمت برابر ہے 1/√۲ جم و + 1/√۲ جب و

= ± √((۱ + جب ۲ و)/۲) ..... (۱)

اور 1/√۲ جم و − 1/√۲ جب و = ± √((۱ − جب ۲ و)/۲) ..... (۲)

یہاں تفریق کرنے سے ہم قیم مطلوب جب و کی لو معلوم کر سکتے ہیں ✦

پہلی مساوات مین اوپر کی یا نیچے کی علامت جو یا مثبت یا منفی ہے بطور جم (و - $\frac{\pi}{4}$) لی گئی ہے +

یعنے یہہ برابر ہے و - $\frac{\pi}{4}$ کی جو واقع ہے درمیان ۲ ن π - $\frac{1}{2}$ π اور ۲ن π + $\frac{1}{2}$ π کے +

یا درمیان ۲ن π + $\frac{1}{2}$ π اور ۲ن π + $\frac{3\pi}{2}$ کے

اسیطرح ہم علامت دوسری مساوات کی ظاہر کر سکتے ہین +

س ۳۲ فرض کرو کہ ک ظاہر کرتا ہے قیمت اون تمام عددون کے جو θ کے برابر ہین +

پس $\frac{\text{ا جم } (\theta + \text{ا}) + \text{ب جب } (\theta + \text{ب})}{\text{اَ جب } (\theta + \text{ا}) + \text{ب جم } (\theta + \text{ب})}$ = ک تو

(اَ جم (θ + ا) + بَ جب (θ + ب) =

= ک {اَ جب (θ + ا) + بَ جم (θ + ب)}

∴ جم θ (اَ جم ا + ب جب ب) + جب θ (ب جم ب
- ا جب ا) =

= ک جم θ (اَ جب ا + بَ جم ب) + ک جب θ

(اَ جم ا - ب حب ب)

∴ جم ۵ {ا جم ا + ب حب ب - ک (اَ جب ا + بَ حسم ب) }

+ جب ۵ {ب جم ب - ا جب ا — ک (اَ جم ا — بَ جب ب) } = ۰

اب یہہ تمام قیمت = ۵ کے صحیح ہے

۵ کو بجاے صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے فرض کرو

اسلئے ھم ذیل مین دو نتیجے نکال لیتے ہین .

ا جم ا + ب جب ب = ک (اَ جب ا + بَ جم ب)

ب جم ب - ا جب ا = ک (اَ جم ا - بَ جب ب)

اور یہہ ظاہر ہے کہ اگر یہہ رقمین وہی قیمت ظاہر کرین تو ضرب کرنے سے ھم حاصل کرتے ہین (ا جم ا + ب جب ب) (اَ جم ا - بَ جب ب)

= (اَ جب ا + بَ جم ب) (ب جم ب - ا جب ا)

∴ ا اَ جم^۲ ا - ب بَ جب^۲ ب +

+ (اَ ب — ا بَ) جم ا جب ب

= ب بَ جم^۲ ب - ا اَ جب^۲ ا + (اَ ب - ا بَ) جب ا جم ب

اسواسطے ا اَ - ب بَ = (ا بَ - اَ ب) جب (ا - ب)

س ۳۳ فرض کرو کہ ا = دو زاویون ی اور و کی قیمت کی

تب جب و + جب ی = ۲ جب $\frac{\text{و} + \text{ی}}{۲}$ جم $\frac{\text{و} - \text{ی}}{۲}$ = ۲ جب $\frac{۱}{۲}$ جم $\frac{\text{و} - \text{ی}}{۲}$

اور یہ مثال کے تعدد مین سب سے بڑی قیمت ہے جبکہ جم $\frac{\text{و} - \text{ی}}{۲}$ سب سے بڑا ہے یعنے جب و - ی = ۰ یعنے و = ی

پہر مس و + مس ی = $\frac{\text{جب و}}{\text{جم و}} + \frac{\text{جب ی}}{\text{جم ی}}$ = $\frac{\text{جب (و + ی)}}{\text{جم و جم ی}}$ = $\frac{\text{جب ا}}{\text{جم و جم ی}}$ = $\frac{\text{۲ جب ا}}{\text{۲ جم و جم ی}}$ = $\frac{\text{۲ جب ا}}{\text{جم (و - ی) + جم (و + ی)}}$ = $\frac{\text{۲ جب ا}}{\text{جم (و - ی) + جم ا}}$

اور جبکہ جم (و - ی) = ۱ تو جم ا کی مقداری قیمت سب سے کم ہے یعنے جبکہ و = ی

س ۳۴ مس ا مس ب + مس ب مس س + مس س مس ا = ۱ بموجب دفعہ ۱۱۴

∴ مس² ا + مس² ب + مس² س = ۱

+ ½ {(مس ا - مس ب)²

$+ \frac{1}{2}\,(\text{مس س} - \text{مس ا})^{2}$

یہان اس مثال کی کم سے کم قیمت اوسوقت ہوتی ہے جبکہ
مس ا - مس ب اور مس ب - مس س
اور مس س - مس ا تمام صفر ہون اور تب قیمت اسکی
اکائی کے برابر ہوگے ✱

س ۳۵ مس ا + مس ب + مس س = مس ا مس ب مس س

بموجب دفعہ ۱۱۴

$\therefore \frac{1}{\text{مم ا}} + \frac{1}{\text{مم ب}} + \frac{1}{\text{مم س}} = \frac{1}{\text{مم ا مم ب مم س}}$

$\therefore$ مم ب مم س + مم ا مم س + مم ا مم ب = ۱

$\therefore \text{مم}^{2}\text{ا} + \text{مم}^{2}\text{ب} + \text{مم}^{2}\text{س}$

$= 1 + \frac{1}{2}(\text{مم ا} - \text{مم ب})^{2} + \frac{1}{2}(\text{مم ب} - \text{مم س})^{2} +$

$\frac{1}{2}(\text{مم س} - \text{مم ا})^{2}$

اسجگہہ اس مثال کی سب سے کم قیمت اُسوقت ہوگی جبکہ مم ا - مم ب

اور مم ب مم س اور مم س س - مم ۱
تمام منفی ہو جائین اور تب قیمت اسکی ایک اکائی کے
برابر ہوگی

س ۳۶ مم ب + مم س - مم ۱ = $\frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}} + \frac{\text{جم س}}{\text{جب س}} - \frac{۱}{\text{جب ۱}}$

$= \frac{\text{جب (ب + س)}}{\text{جب ب جب س}} - \frac{۱}{\text{جب ۱}} = \frac{\text{جب ۱}}{\text{جب ب جب س}} - \frac{۱}{\text{جب ۱}}$

$= \frac{\text{جب}^{۲}\text{ ۱ - جب ب جب س}}{\text{جب ۱ جب ب جب س}}$

اسجگہ اسطرح حل کرنے سے ہم پاتے ہین کہ ان دو دی ہوی
مثالونکا فرق برابر ہے ایک کسر کے جسکا مخرج +

جب ۱ جب ب جب س ہو اور شمار کنندہ

جب^{۲} ۱ + جب^{۲} ب + جب^{۲} س - جب ب جب س

- جب س جب ۱ - جب ۱ جب ب ہو

یعنے ½ (جب ۱ - جب ب)^{۲} + ½ (جب ب - جب س)^{۲}

+ ½ (جب س - جب ۱)^{۲}

یہہ مثال منفی کبھی نہین ہوگی +

س ۳۷ فرض کرو کہ ۱ اور ب اور س تین زاویہ حادہ ہین
اسطرح سے کہ

جم۲ ا + جم۲ ب + جم۲ س = ۱

تب جم۲ ا = ۱ - جم۲ س - جم۲ ب = جب۲ س

- جم۲ ب

= - جم (س - ب) جم (س + ب)

یہہ ظاہر کرتا ہے کہ س + ب ضرور زاویہ قایمہ سے بڑا ہے

اب اگر ہم فرض کرین کہ اَ = ۱۸۰ - س - ب کے تو جم۲ اَ =

جم۲ (ب + س) اور اسلیے کم ہوگا جم بہ نسبت جم (س - ب)

جم (س + ب) کے اس لیے کہ ہم غور کرتے ہین کہ س ب سے چھوٹا

نہین ہے اوربس - ب کم ہے ۱۸۰ - س - ب سے

اب جم۲ ا بڑا ہے جم۲ اَ سے اور ا کم ہے بہ نسبت اَ کے

اور اِس لیے ا + ب + س کم ہے ۱۸۰ سے

س۳۸ بموجب دفعہ ۱۰۲ کے جب ا + جب ب + جب س -

جب (ا + ب + س) = جب ا (۱ - جم ب جم س)

+ جب ب (۱ - جم س جم ا) + جب س (۱ - جم ا جم ب)

+ جب ا جب ب جب س

اور جبکہ ا اور ب اور س زاویہ حادے ہین تو یہہ مثال ضرور مثبت ہے

س ۳۹ فرض کرو کہ $ی = \left(\text{جم}\,\frac{1}{ن}\right)^{ن^2}$

$\therefore$ $\text{لوگ}\ ی = ن^2\ \text{لوگ جم}\ \frac{1}{ن} = \frac{ن^2}{2}\ \text{لوگ}\left(1 - \text{جب}^2\,\frac{1}{ن}\right)$

$= -\frac{ن^2}{2}\left\{\text{جب}^2\,\frac{1}{ن} + \frac{1}{2}\,\text{جب}^4\,\frac{1}{ن} + \frac{1}{3}\,\text{جب}^6\,\frac{1}{ن} + \cdots\right\}$

اب $ن\ \text{جب}\ \frac{1}{ن} = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{ن}}{\frac{1}{ن}}$ اور یہہ برابر ہے ۱ کے جبکہ ن غیر محدود بڑہائی جاوے

اور اسلئے $ن^2\ \text{جب}^2\,\frac{1}{ن} = 1$

تو $ن^2\ \text{جب}^4\,\frac{1}{ن} = ن^2\ \text{جب}^2\,\frac{1}{ن} \times \text{جب}^2\,\frac{1}{ن}$ اور یہہ صفر ہوجائیگی

جبکہ ن غیر محدود بڑہائی جاوے اسیطرح دوسری مثالون

مین لوگ ی مین صفر ہو جاتے ہین اور جیسا کہ

۱۰۲ دفعہ کے بموجب انکی قیمت صفر ہے اور اسلئے لوگ

$ی = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $ی = پ^{-\frac{1}{2}}$

س ۴۰ فرض کرو کہ $د = \left(\text{جم}\,\frac{1}{ن}\right)^{ن^3}$

$\therefore$ $\text{لوگ}\ د = ن^3\ \text{لوگ جم}\ \frac{1}{ن} = \frac{ن^3}{2}\ \text{لوگ}\left(1 - \text{جب}^2\,\frac{1}{ن}\right)$

$= -\frac{ن^3}{2}\left\{\text{جب}^2\,\frac{1}{ن} + \frac{1}{2}\,\text{جب}^4\,\frac{1}{ن} + \frac{1}{3}\,\text{جب}^6\,\frac{1}{ن} + \cdots\right\}$

پہلی مثال کے حل کرنے مین ہمنے ظاہر کیا ہے کہ

$ن^2\ \text{جب}^2\,\frac{1}{ن} = 1$

اسجگہہ $\text{ن}^{۲}\ \text{جب}^{۲}\ \frac{۱}{\text{ن}} = \text{ن}\ \frac{۲}{۱}$ اور اسطرح لا انتہا ہوجائیگی
اسطرح لوکارتم و لا انتہا منفی ہے اور اس لئے و صفر ہوگا

س ۱۴ $\text{جب}\,\theta - (\text{مس}\,\theta - \frac{۱}{۲}\text{مس}^{۳}\theta) = \text{جب}\,\theta - \text{مس}\,\theta + \frac{۱}{۲}\text{مس}^{۳}\theta$

$$= \text{جب}\,\theta - \frac{\text{جب}\,\theta}{\text{جم}\,\theta} + \frac{\text{جب}^{۳}\theta}{۲\,\text{جم}^{۳}\theta} = \frac{\text{جب}\,\theta}{\text{جم}^{۳}\theta} \times \left\{\text{جم}^{۳}\theta - \text{جم}^{۲}\theta + \frac{۱}{۲}\text{جب}^{۲}\theta\right\}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\theta}{۲\,\text{جم}^{۳}\theta}\left\{۲\,\text{جم}^{۳}\theta - ۲\,\text{جم}^{۲}\theta + ۱ - \text{جم}^{۲}\theta\right\}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\theta(۱-\text{جم}\,\theta)}{۲\,\text{جم}^{۳}\theta}\left\{۱ + \text{جم}\,\theta - ۲\,\text{جم}^{۲}\theta\right\}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\theta\,(۱-\text{جم}\,\theta)\,(۱-\text{جم}\,\theta)\,(۱+۲\,\text{جم}\,\theta)}{۲\,\text{جم}^{۳}\theta}$$

$= \frac{\text{جب}\,\theta\,(۱-\text{جم}\,\theta)^{۲}\,(۱+۲\,\text{جم}\,\theta)}{۲\,\text{جم}^{۳}\theta}$ جوکہ مثبت ہے

س ۲۴ فرض کرو کہ $\text{و} = \left(\frac{\text{و}-۱}{\text{و}}\right)^{\text{و}}$
تب $\text{لوگ}\,\text{و} = \text{و}\,\text{لوگ}\,\frac{\text{و}-۱}{\text{و}} = \text{و}\,\text{لوگ}\,(۱-\frac{۱}{\text{و}})$
$= -\text{و}\left\{\frac{۱}{\text{و}} + \frac{۱}{۲\text{و}^{۲}} + \frac{۱}{۳\text{و}^{۳}} + \ldots\right\}$

= − { ۱ + ۱/۲و + ۱/۳و۲ + ۰۰۰۰ }

اِسطرح لوکارثم ھمیشہ منفی ہوتا ہے اور جیسے جیسے د بڑھتی ہے لوکارثم حساباً گھٹتی ہے اور اسیطرح و بڑھتے ہے جبکہ د لاانتہا ہے تو لوگ و = −۱۱ اور اسلئے و = ہی

سوالات نمبر ۱۱

س ۱

۴٫۰۹۴۸۵۵۳

۴٫۰۹۴۸۲۰۴

۰٫۰۰۰۰۳۴۹

۱ : ٫۳۵ :: ٫۰۰۰۰۳۴۹ : د

اِسطرح د = ٫۰۰۰۰۱۲۲

∴ لوگ ۱۲۳۴۰٫۳۵ = ۴٫۰۹۴۸۳۲۶

س ۲

٫۰۲۸۸۵۵۸	٫۰۲۸۸۳۵۵
٫۰۲۸۸۱۵۴	٫۰۲۸۸۱۵۲
٫۰۰۰۰۴۰۶	٫۰۰۰۰۲۰۳

٫۰۰۰۰۴۰۶ : ٫۰۰۰۰۲۰۳ :: ٫۰۰۰۱ : و

∴ و = ٫۰۰۰۰۵

∴ لوگ ۱٫۰۶۸۶۵ = ٫۰۲۸۸۳۵۵

س۳

۴٫۳۷۰۲۷۲۵

۴٫۳۷۰۲۵۴۰

٫۰۰۰۰۱۸۵

۱	۱۸۵
۲	۳۷۰
۳	۵۵۵
۴	۷۴۰
۵	۹۲۵
۶	۱۱۱۰
۷	۱۲۹۵
۸	۱۴۸۰
۹	۱۶۶۵

لوگ ۲۳۴۵۶ = ۴٫۳۷۰۲۵۴۰

جمع کرو واسطے ۳ ۵۵۵

۸ ۱۴۸۰

۴٫۳۷۰۲۶۷۰۳۰

جواب سات درجہ کسر اعشاریہ تک نکالو ۔

لوگ ۲۳۴۵۶۱۳۸ = ۴٫۳۷۰۲۶۱۰

اور لوگ ٫۲۳۴۵۶۳۸ = ۳̄٫۳۷۰۲۶۱۰

س۴

(۱٫۱۸۷۵۳۱۴۵) = ۲̄٫۱۲۴۶۸۵۵

٫۱۲۴۶۸۵۵ ٫۱۲۴۶۹۹۸

٫۱۲۴۶۶۷۲ ٫۱۲۴۶۶۷۲

٫۰۰۰۰۱۸۳ ٫۰۰۰۰۳۲۶

،۰۰۰۰۳۲۶ : ،۰۰۰۰۱۸۳ :: ،۰۰۰۱ : د

∴ د = ،۰۰۰۰۵۶

∴ لوگ ۶۵۵۲۳۳ ،۱ = ،۱۲۴۶۸۵۵

∴ لوگ ۱۱۶۵۵۲۳۳۱ ،۰ = ،۱۲۴۶۸۵۵ $\bar{۴}$

۶۵۳۰۶۸ ۵، | ،۰۰۰۱ : ،۰۰۰۰۴ :: ،۰۰۰۰۱۱۲ : د

۴۴۲۰۶۸ ۵،

۲۱۱۰۰۰،   ∴ د = ،۰۰۰۰۴۵

س ۵

∴ لوگ ۴۰۵۵۸۳، = ۹۸۲۰۶۸ ۵،

∴ لوگ ۴۰۵۵۸۳ ۰۰، = ۹۸۲۰۶۸۵،$\bar{۳}$

∴ لوگ (۴۰۵۵۸۳ ۰۰،)$^{\frac{۱}{۴}}$ = $\frac{۱}{۴}$(۹۸۲۰۶۸۵،$\bar{۳}$) =

$\frac{۱}{۴}$ (۴ − ۹۸۲۰۶۸۵، ۱) = ۲۷۰۵۶۹۳،$\bar{۱}$

س ۶

لوگ (۴۲)$^{\frac{۱}{۲}}$ = $\frac{۱}{۲}$ لوگ ۴۲ = ۶۵۰۱۰۹۶، ۱

۴۷۰۱۰۹۶، ۱   ۶۵۰۱۰۹۶، ۱

۶۸۹۰۰۹۶، ۱   ۶۸۹۰۰۹۶، ۱

۸۸۰۰۰۰،   ۰۷۰۰۰۰،

،۰۰۰۰۰۸۸ : ،۰۰۰۰۰۷۰ :: ،۰۰۱ : د

∴ د = ،۰۰۰۷۹

∴ لوگ ۴،۸۹۸۹۷۹ = ،۶۹۰۱۰۵۶

∴ (۲۴)$^{۱/۲}$ = ۴،۸۹۸۹۷۹

ش لوگ (۱۴۲،۷۱)$^{۱/۷}$ = ۱/۷ (۲،۱۵۴۴۵۳۴) = ،۳۰۷۷۷۹۲

،۳۰۷۷۹۵۴ ، ،۳۰۷۷۷۹۲ ، ،۰۰۰۰۲۱۳ : ،۰۰۰۰۰۵۱ :: ۱ : و

،۳۰۷۷۷۴۱ / ،۰۰۰۰۲۱۳   ،۳۰۷۷۷۴۱ / ،۰۰۰۰۰۵۱ ∴ و = ،۲۴

∴ لوگ ۲۰۳۱۳،۲۴ = ۴،۳۰۷۷۷۹۲

∴ لوگ ۲،۰۳۱۳۲۴ = ،۳۰۷۷۹۹۲

∴ لوگ (۱۴۲،۷۱)$^{۱/۷}$ = ۲،۰۳۱۳۲۴

ش لوگ (،۰۰۷)$^{۱/۵}$ = ۱/۵ لوگ ،۰۰۷ = ۱/۵ (۳̄،۸۴۵۰۹۸۰) =

۱/۵ (‎-۵+۳،۸۴۵۰۹۸۰) = ۱̄،۷۶۹۰۱۹۶

،۷۶۹۰۲۲۷   ،۷۶۹۰۱۹۶̄

،۷۶۹۰۱۵۳   ،۷۶۹۰۱۵۳

،۰۰۰۰۰۷۴   ،۰۰۰۰۰۴۳

،۰۰۰۰۰۷۴ : ،۰۰۰۰۰۴۳ :: ۱ : و

∴ و = ،۵۸

∴ لوگ ۵۸۷۵۱،۵۸ = ۴،۷۶۹۰۱۹۶

∴ لوگ ،۵۸۷۵۱۵۸ = ۱̄،۷۶۹۰۱۹۶

∴ لوگ $(۰٫۰۰۲)^{\frac{۱}{۵}}$ = ٫۵۸۷۵۱۵۸

س ۹ لوگ $(۰٫۰۶۲۵)^{\frac{۱}{۵}}$ = لوگ $\left(\frac{۶۲۵}{۱۰۰۰۰}\right)^{\frac{۱}{۵}}$

= لوگ $\left(\frac{۱۲۵}{۲۰۰۰}\right)^{\frac{۱}{۵}}$ = لوگ $\left(\frac{۲۵}{۴۰۰}\right)^{\frac{۱}{۵}}$ = لوگ $\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۵}}$

= − $\frac{۱}{۵}$ لوگ ۱۶ = − $\frac{۴}{۵}$ لوگ ۲ = −۰٫۲۴۰۸۲۴۰

= $\bar{۱}$٫۷۵۹۱۷۶۰ = لوگ ٫۵۷۴۳۴۹۱

∴ $(۰٫۰۶۲۵)^{\frac{۱}{۵}}$ = ٫۵۷۴۳۴۹۱

س ۱۰ لوگ $(۲٫۷)^{-\frac{۱}{۵}}$ = − $\frac{۱}{۵}$ لوگ ۲٫۷ = − $\frac{۱}{۵}$ (٫۴۳۱۳۶۳۸)

= −٫۰۸۶۲۷۲۸

= $\bar{۱}$٫۹۱۳۷۲۷۲ = لوگ ٫۸۱۸۲۵۱۷

∴ $(۲٫۷)^{-\frac{۱}{۵}}$ = ٫۸۱۸۲۵۱۷

س ۱۱ لوگ ٫۰۰۷۱۹۶۸۶ = $\bar{۳}$٫۸۵۷۱۳۹۳ + $\frac{۶}{۱۰}$ × ٫۰۰۰۰۰۶۰

= $\bar{۳}$٫۸۵۷۱۴۳۰ +

لوگ $(۰٫۰۰۷۱۹۶۸۶)^{\frac{۱}{۸}}$ = $\frac{۱}{۸}$ ($\bar{۳}$٫۸۵۷۱۴۳۰) =

$\frac{۱}{۸}$ (−۸ + ۵٫۸۵۷۱۴۳۰) = $\bar{۱}$٫۷۳۲۱۴۲۹

لیکن لوگ ٫۷۱۹۶۸۶ = $\bar{۱}$٫۸۵۷۱۴۳۰

∴ $(۰٫۰۰۷۱۹۶۸۶)^{\frac{۱}{۸}}$ = ٫۷۱۹۶۸۶

س ۱۲ لوگ $(۱٫۰۳)^{\frac{۱}{۱۲}}$ = $\frac{۱}{۱۲}$ × ٫۰۱۲۸۳۷۲ =

= −٫۱۲۸۳۷۲ = ۱̄٫۸۷۱۶۲۸ = لوگ ٫۷۴۴۰۹۴۲

∴ (۱٫۰۳)^{−۱۰} = ٫۷۴۴۰۹۴۲

س ۱۳   لوگ (۱٫۰۵)^{−۲۰} = −۲۰ × ٫۰۲۱۱۸۹۳ =

= −٫۴۲۳۷۸۶ = ۱̄٫۵۷۶۲۱۴ = لوگ ٫۳۷۶۸۹

∴ (۱٫۰۵)^{−۲۰} = ٫۳۷۶۸۹

∴ ۶۴ {۱ − (۱٫۰۵)^{−۲۰}} = ۶۴ (۱ − ٫۳۷۶۸۹)

= ۶۴ × ٫۶۲۳۱۱ = ۳۹٫۸۷۹۰۴

س ۱۴   اس کو ی فرض کرو تو لوگ ی = √۵ لوگ ۵ = ۲√۵ لوگ √۵

∴ لوگ × لوگ ی = لوگ ۲ + لوگ √۵ + لوگ (لوگ √۵)

اب لوگ (√۵) = ½ لوگ ۵ = ½ لوگ ۱۰/۲ = ½ (۱ − لوگ ۲)

= ½ (۱ − ٫۳۰۱۰۳۰) = ½ (٫۶۹۸۹۷۰) = ٫۳۴۹۴۸۵

لوگ (لوگ √۵) = ٫۳۴۹۴۸۵ = ۱̄٫۵۴۳۴۲۸

∴ لوگ (لوگ ی) = ٫۳۰۱۰۳۰ + ٫۳۴۹۴۸۵ +

۱̄٫۵۴۳۴۲۸ = ٫۱۹۳۹۴۳

∴ لوگ ی = ۱٫۵۶۲۹۴۴

٫۵۶۳۰۰۶   ٫۵۶۲۹۴۴

٫۵۶۲۸۸۷   ٫۵۶۲۸۸۷

٫۰۰۰۱۱۹   ٫۰۰۰۰۵۷

۱۱۹۰۰،۰ : ۵۷۰۰۰، :: ۱۰۰، : و

∴ و = ۴۰۰۰، ۰ ∴ ی = ۳۶،۵۵۴۸

س ۱۵ لوگ ۱۴۴ = لوگ (۱۲)^{۲} = ۲ لوگ ۱۲ = ۲،۱۵۸۳۶۲۴

لوگ (۱،۴۴)$^{\overline{۶}}$ = − ۶ لوگ ۱،۴۴ = − ۶ (۱۵۸۳۶۲۴،)

= − ۹۵۰۱۷۴۴، = $\overline{۱}$،۰۴۹۸۲۵۶ = لوگ ۱۱۲۱۵۶۸،

∴ (۱،۴۴)$^{\overline{۶}}$ = ۱۱۲۱۵۶۸،

∴ لوگ (۱،۴۴)$^{\overline{۱۲}}$ = − ۱۲ لوگ (۱،۴۴) = − ۱۲ (۱۵۸۳۶۲۴،) = − ۱،۹۰۰۳۴۸۸

= $\overline{۲}$،۰۹۹۶۵۱۲ = لوگ ۰۱۲۵۷۹۱۵، ∴ (۱،۴۴)$^{\overline{۱۲}}$ = ۰۱۲۵۷۹۱۵،

∴ (۱،۴۴)$^{\overline{۶}}$ − (۱،۴۴)$^{\overline{۱۲}}$ = ۱۱۲۱۵۶۸، − ۰۱۲۵۷۹۱۵،

= ۰۹۹۵۷۷۶۵،

س ۱۶ لوگ $\frac{۱}{(۱،۰۵)^{۱۳}}$ = − ۱۳ لوگ ۱،۰۵ = − ۱۳ (۰۲۱۱۸۹۳،)

= − ۲۷۵۴۶۰۹، = $\overline{۱}$،۷۲۴۵۳۹۱ = لوگ ۵۳۰۳۲۱۴،

∴ لوگ $\frac{۱}{(۱،۰۵)^{۱۳}}$ = ۵۳۰۳۲۱۴،

لوگ $\frac{۱}{(۱،۰۵)^{۲۰}}$ = − ۲۰ لوگ ۱،۰۵ = − ۲۰ (۰۲۱۱۸۹۳،)

= − ۴۲۳۷۸۶،

= ۱۱۵، ۶۲۱۴ = لوگ ۱۳، ۶۸۸۹۴

∴ $\frac{۱}{۳(۱۱۰۵)}$ = ۱۳، ۶۸۸۹۴ ∴

∴ $\frac{۱}{۱۰۵}$ {$\frac{۱}{(۱۱۰۵)}$ ۱۳ $\frac{۱}{۱۰۰(۱۱۰۵)}$} = ۲۰ {۱۵۳۰۳۲۱۴

− ۱۳، ۶۸۸۹۴)}

= ۲۰ {۱۱۵۳۴۳۲} = ۳۱۰۶۸۶۴

ش ۱۷

۱، ۴۳۱۴۴۸

۱، ۳۱۳۵۳،

۱۰۱۱،۹۱۱

۶۰ : ۱ :: ۱۰۱۱،۹۱۱ : و

اوسط و = ۱۰۰۱۹۷۵

∴ جب ۴۵° اَ = ۳، ۵ ۳۱۳ ۱۱، + ۱۰۰۰۱۹۷۵ =

۱، ۲۱۵۵۰۲

ش ۱۸

۱ ۱۲، ۰۶۳۶

۱ ۱۲۶، ۶۱

۱۰۰۰۲۸۸۵

۶۰″ : ۲۵″ :: ۱۰۰۰۲۸۸۵ : و

اوسط و = ۱۰۰۰۱۲۰۲

∴ جب ۴۵° − ۱۰′ − ۲۵″ = ۱۲۶، ۶۱ + ۱۰۰۰۱۲۰۲

= ۱۱۲۶۸۹۶۳

س ۱۹

۹،۴۶۶۳۴۸۳

۹،۴۶۵۹۳۵۳   ۶۰″ : ۱۲″ :: ،۰۰۰۴۱۳۰ : د

،۰۰۰۴۱۳۰

اسواسطی د = ،۰۰۰۰۸۲۶ ∴ ل جب ۱۶° ۶′ ۱۲″

= ۹،۴۶۵۹۳۵۳ + ،۰۰۰۰۸۲۶

= ۹،۴۶۶۰۱۷۹

س ۲۰

۹،۶۳۸۲۵۸۲

۹،۶۳۸۰۰۳۸   ۶۰″ : ۱۲″ :: ،۰۰۰۲۵۴۴ : د

،۰۰۰۲۵۴۴

اسواسطی د = ،۰۰۰۰۵۰۹

∴ ل جب ۲۶° ۴۲′ ۱۲″ = ۹،۶۳۸۰۰۳۸ +

،۰۰۰۰۵۰۹

= ۹،۶۳۸۰۵۴۷

س ۲۱

۹،۵۰۵۲۸۹۱

۹،۵۰۴۸۵۳۸   ۶۰″ : ۳۵″ :: ،۰۰۰۴۳۵۳ : د

،۰۰۰۴۳۵۳

اسواسطی د = ،۰۰۰۲۵۳۹

∴ ل جم ۲° - ۱۵′ - ۳۵″ = ۹،۵۰۵۲۸۹۱

- ،۰۰۰۲۵۳۹

= ۹،۵۰۵۰۳۵۲

۹،۱۶۰۴۵۶۹ س ۲۲

۹،۱۶۰۳۴۹۳

،۰۰۰۱۰۷۶

،۰۰۰۱۴۸۶ : ،۰۰۰۱۰۷۶ :: ۱۰ : و

∴ و = ۷ . . زاویہ مطلوبہ ۱° ۶′ ۷″ ہے

۹،۹۷۱۳۳۸۳ س ۲۳

۹،۹۷۱۳۳۵۱

،۰۰۰۰۰۳۲

،۰۰۰۰۰۷۹ : ،۰۰۰۰۰۳۲ :: ۱۰ : لا

∴ لا = ۴ اسلئے زاویہ مطلوبہ ۲۰° ۵۳′ ۲۰″ - ۴″ سے

یعنی ۲۰° ۵۳′ ۱۶″ کیونکہ جون جون ل جم بڑہتا جاتا ہے تیون تیون زاویہ

۶۰″ : ۲۶″ :: ،۰۰۰۰۸۶۵ : و ∴ و = ،۰۰۰۰۳۷۵ س ۲۴

اسلئے ل جم ۴۳° ۴۲′ ۲۶″ = ۹،۹۱۶۵۱۳۷ - ،۰۰۰۰۳۷۵ = ۱،۷۱۶۴۷۶۲

بہ ۹،۹۱۶۵۶۴۶
۹،۹۱۶۵۱۳۷
،۰۰۰۰۵۰۹

،۰۰۰۰۸۶۵ : ،۰۰۰۰۵۰۹ :: ۶۰ : و ∴ و = ۳۵ اسلئے زاویہ مطلوبہ

۴۳° ۴۲′ ۳۵″ ہے یعنی ۴۳° ۴۳′ ۲۵″ = جواب

س ۲۵

چونکہ قع θ × جم θ = ۱ اور لوگ قع θ + لوگ جم θ = ۰

∴ ل قع θ + ل جم θ − ۲۰ = ۰ ∴ ل قع θ = ۲۰

− ل جم θ

پہلے ہم دریافت کرینگے ل جم ۳۷° ۱۹′ ۴۷″

۶۰″ : ۴۷″ :: ٫۰۰۰۰۹۶۳ : و ∴ و =

٫۰۰۰۰۷۵۴ ∴ ل جم ۳۷° ۱۹′ ۴۷″ =

۹٫۹۰۰۵۲۹۴ − ٫۰۰۰۰۷۵۴ =

۹٫۹۰۰۴۵۴۰ تب ل قع ۳۷° ۱۹′ ۴۷″ =

۲۰ − ۹٫۹۰۰۴۵۴۰ = ۱۰٫۰۹۹۵۴۶۰

پھر دریافت کرینگے ل جب ۳۷° ۱۹′ ۴۷″ ∵ ۶۰″ : ۴۷″ :: ٫۰۰۰۱۶۵۷ : و ∴ و = ٫۰۰۰۱۲۹۸ ∴ ل جب ۳۷° ۱۹′ ۴۷″ =

۹٫۷۸۲۶۳۰۱ + ٫۰۰۰۱۲۹۸ =

۹٫۷۸۲۷۵۹۹ تو مس θ = جب θ / جم θ ∴ لوگ مس θ

= لوگ جب θ − لوگ جم θ ∴ ل مس θ − ۱۰

= ل جب θ − ۱۰ − (ل جم θ − ۱۰) =

ل جب θ − ل جم θ ∴ ل مس θ = ۱۰ + ل جب θ

− ل جم θ ∴ ل مس ۳۷° ۱۹′ ۴۷″ = ۱۰ +

۹٫۷۸۲۷۵۹۹ − ۹٫۹۰۰۴۵۴۰ =

۹٫۸۸۲۳۰۵۹

۶۰″ : ۶٫۳۴۲۳″ :: ۰٫۰۰۰۱۹۹۸ : و

∴ و = ۰٫۰۰۰۰۸۱۹ ∴ ل جب ۲۳° ۱۸′ ۶٫۳۴۲۳″

= ۹٫۷۲۷۸۲۷۷ + ۰٫۰۰۰۰۸۱۹

= ۹٫۷۲۷۹۰۹۶

۶۰″ : ۶٫۳۴۲۳″ :: ۰٫۰۰۰۰۷۹۹ : و

∴ و = ۰٫۰۰۰۰۳۲۸ ∴ ل جم ۲۳° ۱۸′ ۶٫۳۴۲۳″

= ۹٫۹۶۲۷۹۹۱۳ − ۰٫۰۰۰۰۳۲۸

= ۹٫۹۶۲۷۹۵۸۵ اور

ل س ۲۳° ۱۸′ ۶٫۳۴۲۳″ = ۱۰

+ ل جب ۲۳° ۱۸′ ۶٫۳۴۲۳″ − ل جم ۲۳° ۱۸′ ۶٫۳۴۲۳″

= ۹٫۸۰۰۹۵۱۱

حل سوالات باب دوازدھم

س ۱ بڑا زاویہ بڑے ضلع کے سامنے ہوتا ہی اسطرح سے

$$جم = \frac{(و^۲-۱)^۲ + (۲و+۱)^۲ - (۱+و+و^۲)^۲}{۲(و^۲-۱)(۲و+۱)}$$

$$= \frac{و^۴ - ۲و^۲ + ۱ + ۴و^۲ + ۴و + ۱ - (و^۴ + و^۲ + ۱ + ۲و^۳ + ۲و^۲ + ۲و)}{۲(و^۲-۱)(۲و+۱)}$$

$$= \frac{-۲و^۳ - و^۲ + ۲و + ۱}{۲(۲و^۳ + و^۲ - ۲و - ۱)} = -\frac{۱}{۲}$$

اسواسطے زاویہ ۱۲۰ درجہ کا ہے

س۲ ۲ جب س جم ب = جب ا = جب (ب + س)

= جب ب جم س + جم ب جب س

∴ جب س جم ب = جب ب جم س ∴ جب (س − ب)

= ۰ ∴ ب = س

س۳ جم ا = $\frac{ب}{س}$ اور جب ا = $\frac{ا}{س}$

∴ $\frac{۱ + جم ا}{جب ا} = \frac{س + ب}{ا}$ ∴ جم $\frac{ا}{۲} = \frac{س + ب}{ا}$

س۴ ا مس ا + ب مس ب = (ا + ب) مس $\frac{ا + ب}{۲}$

∴ ا (مس ا − مس $\frac{ا + ب}{۲}$) = ب (مس $\frac{ا + ب}{۲}$ −

مس ب)

$$\therefore \frac{\text{ا}\left(\text{جب ا جم}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲} - \text{جم ا جب}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\right)}{\text{جم ا جم}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{ب}\left(\text{جب}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\,\text{جم ب} - \text{جم}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}\,\text{جب ب}\right)}{\text{جم ب جم}\,\frac{\text{ا}+\text{ب}}{۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{ا جب}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{ب جب}\,\frac{\text{ا}-\text{ب}}{۲}}{\text{جم ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}}$$

لیکن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} \therefore \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}} \therefore$

مس ا = مس ب

$\therefore$ ا = ب

س ۵ فرض کرو کہ ۲ ا چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کو ظاہر کرتا ہے تب دوسرے زاوے جداگانہ ۴ ا اور ۸ ا ہیں

$$\therefore ۲\text{ا} + ۴\text{ا} + ۸\text{ا} = \pi \quad \therefore \text{ا} = \frac{\pi}{۱۴}$$

اسلئے ۸،۶ دفعہ کے بموجب اندازہ سب سے بڑے ضلع کا محیط تک

$$= \frac{\text{جب ۸ا}}{\text{جب ۲ا} + \text{جب ۴ا} + \text{جب ۸ا}} = \frac{\text{جب ۸ا}}{\text{جب ۲ا} + \text{جب ۴ا} + \text{جب ۶ا}}$$

= (٢ جب ٤ ا جم ٤ ا) / (٢ جب ٣ ا جم ا + ٢ جب ٣ ا جم ٣ ا)

لیکن ٤ ا + ٣ ا = π/٢ ∴ جم ٤ ا = جب ٣ ا اور اسجگہہ یہہ مسقال مساوی ہے

(جب ٤ ا) / (جم ا + جم ٣ ا) = (٢ جب ٢ ا جم ٢ ا) / (٢ جم ا جم ٢ ا) = (جب ٢ ا) / (جم ا)

= ٢ جب ا

س ٦ ٢ ب س جق ا + ٢ س ا جق ب + ٢ ا ب جق س

= ٢ ب س (١ − جم ا) + ٢ س ا (١ − جم ب)

+ ٢ ا ب (١ − جم س)

= ٢ ب س (١ + جم ا) + ٢ س ا (١ + جم ب)

+ ٢ ا ب (١ + جم س)

= ٤ ب س جم² ا/٢ + ٤ س ا جم² ب/٢ + ٤ ا ب جم² س/٢

= ٤ ص (ص − ا) + ٤ ص (ص − ب) + ٤ ص

(ص − س)

= ٤ ص (٣ ص − ا − ب − س) = ٤ ص² = (٢ ص)² =

مش

(ا + ب + س)^{۲}

فرض کرو کہ ا د = پ اور فرض کرو کہ زاویہ ب اور زاویہ س

زاویے حادہ ہین

جیسا کہ دفعہ ۱۶۸ کے بائین طرف کی شکل مین

تب ا ی = پ جم (۹۰° − ب) = پ جب ب

اور د ی = پ جب (۹۰° − ب) = پ جم ب

اور ی ب = د ی مم ب = پ جم ب مم ب

∴ ا ی . ی ب = پ^{۲} جم^{۲} ب

اسیطرح ا ف . ف س = پ^{۲} جم^{۲} س ∴

∴ ا ی . ی ب جم^{۲} س = ا ف . ف س جم^{۲} ب

پھر فرض کرو کہ زاویون ب اور س مین سے ایک منفرجہ ہے

تو زاویہ س منفرجہ ہے مثلاً جیسا کہ دفعہ ۱۶۸ کے دائین طرف کی

شکل مین

تب ا ی . ی ب = پ^{۲} جم^{۲} ب جیسا کہ پیشتر ثابت ہو چکا ہے

ا ف = پ جم (س − ۹۰°) = پ جب س

د ف = پ جب (س − ۹۰°) = − پ جم س

ف س = د ف مم (۱۸۰° − س) = − د ف مم س

= پ جم س جم س

∴ ا ف ۰ ف س = پ۲ جم۲ س جیسا کہ پیشتر ثابت ہو چکا ہے

س ۸ (جب ۲θ + جب ۴θ) / جب ۳θ = (ا + س) / ب ∴ ۲ جم θ =

∴ جم θ = (ا + س) / ۲ب

∴ مس۲ θ = ۱ / جم۲ θ − ۱ = (۲ب / (ا + س))۲ − ۱

س ۹ جب س زاویہ منفرجہ ہو تو (ا + ب) ۹۰ درجہ سے کم ہے اسلئے جم (ا + ب) مثبت ہے

∴ جم ا جم ب − جب ا جب ب مثبت ہے ∴ جب ا جب ب کم ہے جم ا جم ب سے

∴ (جب ا جب ب) / (جم ا جم ب) ایک اکائی سے کم ہے یعنے مس ا مس ب اکائی سے کم ہے

س ۱۰ چونکہ ا اور ب اور س سلسلہ جمع تفریق مین ہین اسلئے جب ا اور جب ب اور جب س بھی ایسے ہین

اسلئے جب ا + جب س = ۲ جب ب

∴ جب (ا + س)/۲ جم (ا − س)/۲ = ۲ جب ب/۲ جم ب/۲

$= ٢\ \text{جب}\ \frac{\text{ب}}{٢}\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}+\text{س}}{٢}$

$\therefore\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}-\text{س}}{٢} = ٢\ \text{جب}\ \frac{\text{ب}}{٢}$

پھر $\text{ا جم}^{٢}\ \frac{\text{ب}}{٢} + \text{س جم}^{٢}\ \frac{\text{ا}}{٢} = \frac{\text{ا}}{٢}\ (١ + \text{جم س}) + \frac{\text{س}}{٢}\ (١ + \text{جم ا})$

$= \frac{١}{٢}\ (\text{ا} + \text{س}) + \frac{١}{٢}\ (\text{ا جم س} + \text{س جم ا}) =$

$\frac{١}{٢}\ (\text{ا} + \text{س}) + \frac{\text{ب}}{٢}$ بموجب دفعہ ١٧٠

$= \text{ب} + \frac{\text{ب}}{٢}$ اور اندازہ سے $= \frac{٣\text{ب}}{٢}$

س ١١ ا ب د مثلث سے ہم یہ کہتے ہین $\frac{\text{جب ا د ب}}{\text{جب ب ا د}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب د}} = \frac{٢\text{س}}{\text{ا}}$

پ کو بجاے ب ا د کے فرض کرو اسی طرح پر

$\frac{\text{جب}\ (\text{پ} + \text{ب})}{\text{جب پ}} = \frac{٢\text{س}}{\text{ا}} = \frac{٢\ \text{جب س}}{\text{جب ا}}$

$\therefore\ \frac{\text{جب پ جم ب} + \text{جم پ جب ب}}{\text{جب پ}} = \frac{٢\ \text{جب س}}{\text{جب ا}}$

$\therefore\ \text{مم ب} + \text{مم پ} = \frac{٢\ \text{جب س}}{\text{جب ا جب ب}} = \frac{٢\ \text{جب}\ (\text{ا} + \text{ب})}{\text{جب ا جب ب}}$

$= ٢\ \text{مم ا} + ٢\ \text{مم ب}\ \therefore\ \text{مم پ} - \text{مم ب} = ٢\ \text{مم ا}$

س ١٢ فرض کرو کہ مثلث کا زاویہ ا ایک خط مستقیم ا د سے

دو حصوں مین تقسیم ہوتا ہے

ب ا کو پ سے اور س ا کو م سے فرض کرو

اور فرض کرو کہ جب ب / جب م = س / ب

اسطرح جب (ا − م) / جب م = س / ب = جب س / جب ب

∴ جب ا مم م − جم ا = جب س / جب ب ∴ مم م = مم ا

+ جب (ا + ب) / جب ا جب ب = ۲ مم ا + مم ب

اسیطرح مم پ = ۲ مم ا + مم س

∴ مم م − مم پ = مم ب − مم س

فرض کرو کہ مم ا + مم س = ۲ مم ب س ۱۴۴

اسیطرح جم ا / جب ا + جم س / جب س = ۲ جم ب / جب ب

∴ جب (ا + س) / جب ا جب س = ۲ جم ب / جب ب

∴ جب² ب / جب ا جب س = ۲ جم ب ∴ ب² / ا س = (ا² + س² − ب²) / ا س

∴ ۲ ب² = ا² + س²

اسیطرح ا^2 اور ب^2 اور س^2 سلسلہ جمع و تفریق مین ہین

س ۱۴ فرض کرو کہ عمود ا د ایک مثلث کے زاویہ ا سے قاعدہ ب س پر کھینچا گیا ہے

فرض کرو ب ا د = پ اور س ا د = ت

فرض کرو کہ م قاعدہ ب س اور عمود ا د کی باہمی نسبت کو ظاہر کرتا ہے +

تب دفعہ ۱۶۸ کی بائین طرف کی شکل کی حالت مین

ہم رکھتے ہین

$$\text{مس پ} = \frac{\text{ب د}}{\text{ا د}} \quad \text{اور} \quad \text{مس ت} = \frac{\text{س د}}{\text{ا د}}$$

$$\therefore \text{مس پ} + \text{مس ت} = \frac{\text{ب د} + \text{س د}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ب س}}{\text{ا د}} = \text{م} \quad \ldots (1)$$

اور نیز پ + ت = ا

$$\text{اسیطرح مس ا} = \text{مس}\,(\text{پ} + \text{ت}) = \frac{\text{مس پ} + \text{مس ت}}{1 - \text{مس پ مس ت}} \quad \ldots (2)$$

اول اور دوم سے ہم معلوم کر سکتے ہین مس پ اور مس ت

اسیطرح دفعہ ۱۶۸ کے دائین طرف کی شکل

کی حالت مین ہم رکھتے ہین مس پ - مس ت = م اور مس ا

$$= \text{مس}\,(\text{پ} - \text{ت}) = \frac{\text{مس پ} - \text{مس ت}}{1 + \text{مس پ مس ت}}$$

س ۱۵ فرض کرو کہ ایک مثلث کا قاعدہ ب س تقسیم کیا گیا ہے

[illegible] اسطرح کہ

ب د = د ی = ی س

فرض کرو کہ زاویہ ب ا د ظاہر کیا گیا ہے پ سے

اور زاویہ د ا ی پ$_{۲}$ سے اور زاویہ ی ا س پ$_{۳}$ سے

تب ا ب ی مثلث سے ہم رکھتے ہین

$$\frac{\text{جب (پ}_{۱}\text{ + پ}_{۲}\text{)}}{\text{جب ا ی پ}} = \frac{\text{ب ی}}{\text{ا ب}} = \frac{۲}{۳} \cdot \frac{۱}{\text{س}}$$

اور مثلث ا ی س سے ہم رکھتے ہین $\frac{\text{جب پ}_{۳}}{\text{جب ا ی س}}$

$$= \frac{\text{ی س}}{\text{ا س}} = \frac{۱}{۳} \cdot \frac{۱}{\text{ب}}$$

∴ تقسیم سے $\frac{\text{جب (پ}_{۱}\text{ + پ}_{۲}\text{)}}{\text{جب پ}_{۳}} = \frac{۲\text{ب}}{\text{س}}$

اِس طریقہ مین ہم دیکھتے ہین

$$\frac{\text{جب (پ}_{۲}\text{ + پ}_{۳}\text{)}}{\text{جب پ}_{۱}} = \frac{۲\text{س}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{جب (پ}_{۱}\text{ + پ}_{۲}\text{) جب (پ}_{۲}\text{ + پ}_{۳}\text{)}}{\text{جب پ}_{۱}\text{ جب پ}_{۳}} =$$

$$۴ = ۴ \text{ (جب}^{۲}\text{ پ}_{۱}\text{ + جم}^{۲}\text{ پ}_{۲}\text{)}$$

$$\text{(جم پ}_{۲}\text{ + جب پ}_{۲}\text{ تم پ}_{۱}\text{) (تم پ}_{۲}\text{ + جب پ}_{۲}\text{ تم پ}_{۳}\text{)}$$

= ۴ (جب² پ/۲ + جم² پ/۲)

∴ (مم پ/۲ + مم ب/۲) (مم پ/۲ + مم ب/۲) = ۴(۱ + مم² پ/۲)

س ۱۶ فرض کرو کہ جب ا + جب س = ۲ جب ب

تو ۲ جب (ا+س)/۲ جم (ا−س)/۲ = ۴ جب ب/۲ جم ب/۲

= ۴ جم (ا+س)/۲ جب (ا+س)/۲ ∴ جم (ا−س)/۲ = ۲ جم (ا+س)/۲

∴ جم ا/۲ جم س/۲ + جب ا/۲ جب س/۲ = جم ا/۲ جم س/۲ − ۲ جب ا/۲ جب س/۲

∴ ۳ جب ا/۲ جب س/۲ = جم ا/۲ جم س/۲

∴ مس ا/۲ مس س/۲ = ۱/۳

س ۱۷ فرض کرو کہ مثلث ا د ب = پ اور مثلث ا ب د کو ہم ر کہتے ہیں ٭

جب ب ا د / جب ا د ب = ب د / ا ب = ا / مر س

∴ جب (پ + ب) / جب پ = ا / ۲ س

$$\therefore \text{جم ب} + \text{جب ب مم پ} = \frac{\text{ا}}{\text{۲س}}$$

$$\therefore \text{مم پ} = \frac{\frac{\text{ا}}{\text{۲س}} - \text{جم ب}}{\text{جب ب}}$$

$$\therefore \text{مس پ} = \frac{\text{۲س جب ب}}{\text{ا} - \text{۲س جم ب}} =$$

$$\frac{\text{۲ اس جب ب}}{\text{ا}^{۲} - (\text{ا}^{۲} + \text{س}^{۲} - \text{ب}^{۲})}$$

$$= \frac{\text{۲ اس جب ب}}{\text{ب}^{۲} - \text{س}^{۲}} = \frac{\text{۲ب س جب ا}}{\text{ب}^{۲} - \text{س}^{۲}}$$

س ۱۸

$$\text{یہاں مم } \frac{\text{ا}}{۲} + \text{مس } \frac{\text{س}}{۲} = \text{۲ مم } \frac{\text{ب}}{۲}$$

$$\therefore \frac{\text{جم } \frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{ا}}{۲}} + \frac{\text{جم } \frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{س}}{۲}} = \frac{\text{۲ جم } \frac{\text{ب}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{ب}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{۲جب } \frac{\text{ا} + \text{س}}{۲}}{\text{جم } \frac{\text{ا} + \text{س}}{۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{جب } \frac{\text{ا} + \text{س}}{۲}}{\text{جب } \frac{\text{ا}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{س}}{۲}} = \frac{\text{۲جب } \frac{\text{ا} + \text{س}}{۲}}{\text{جم } \frac{\text{ا} + \text{س}}{۲}}$$

$$\therefore \text{جم } \frac{\text{ا} + \text{س}}{۲} = \text{۲ جب } \frac{\text{ا}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{س}}{۲} \therefore \text{جم } \frac{\text{ا}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{س}}{۲}$$

$$- \text{جب } \frac{\text{ا}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{س}}{۲}$$

= ۲ جب ا/۲ جب س/۲

∴ جم ا/۲ جم س/۲ = ۴ جب ا/۲ جب س/۲

∴ مم ا/۲ مم س/۲ = ۴

س ۱۹ اول فرض کرو کہ (جب د ا س) / (جب د ا ب) = ۱/ن

اور (جب د ب س) / (جب د ب ا) = ۱/ن

چونکہ ہم رکھتے ہیں (جب د س ا) / (جب د ب ا) = ب د / د س

اور (جب د ب س) / (جب د ب ا) = ۱/ن

∴ (جب د س ب) / (جب د ب ا) = (ب د) / (د س) . ۱/ن

اسی طرح (جب د س ا) / (جب د ا ب) = (ا د) / (د س) . ۱/ن

∴ (جب د س ب) / (جب د س ا) . (جب د ا ب) / (جب د ب ا) = (ب د) / (د ا)

∴ (جب د س ب) / (جب د س ا) . (د ب) / (د ا) = (ب د) / (د ا)

∴ (جب د س ب) / (جب د س ا) = ۱

اسحالت مین زاویہ س خط مستقیم و س سے تنصیف کیا گیا ہے پہر فرض کرو

$$\text{کہ}\ \frac{\text{جب و ا س}}{\text{جب و ا ب}} = \frac{\text{۱}}{\text{ن}}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{جب و ب ا}}{\text{جب و ب س}} = \frac{\text{۱}}{\text{ن}}$$

اسیطرح زاویہ ب منقسم کیا گیا ہے دو حصون مین مساوی
پہلے دو حصونکے مگر مختلف طور سے واقع ہوائے ہین۔
تب عمل کرو جیسا کہ سابق مین عمل ہو چکا ہے ٭

$$\frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و ب س}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و س}}\ \text{اور}\ \frac{\text{جب و ب س}}{\text{جب و ب ا}} = \text{ن}$$

$$\therefore \frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و ب ا}} = \frac{\text{ن} \times \text{ب و}}{\text{و س}}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{جب و س ا}}{\text{جب و ا ب}} = \frac{\text{ا و}}{\text{و س}} \times \frac{\text{۱}}{\text{ن}}$$

$$\text{اسجگہہ ہم معلوم کرتے ہین کہ}\ \frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و س ا}} = \text{ن}^{\text{۲}}$$

س ۲۳ فرض کرو کہ ایک خط مستقیم جو ایک مثلث کے زاویہ ا
کے تنصیف کرنیسے وہ قاعدہ نقطہ د پر ملتا ہو تب زاویہ

ا د س = زاویہ ب + زاویہ ب ا د کے اسیطرح

جب θ = جب (ب + $\frac{ا}{۲}$)

اسکگہہ ص (جب θ - جب $\frac{ا}{۲}$) = ص {جب (ب + $\frac{ا}{۲}$) - جب $\frac{ا}{۲}$}

= ۲ ص جم $\frac{ب + ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ = ۲ ص جب $\frac{س}{۲}$ لیکن

جب $\frac{س}{۲}$ اور جب $\frac{ب}{۲}$ کیواسطے ان کی قیمتیں بموجب دفعہ ۱۷۱ کے ؛

اسطرح ہم یہ کہتے ہین ۲ ص جب $\frac{س}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ =

$\frac{۲ ص}{ا}$ (ص - ا) $\sqrt{\frac{(ص - ب)(ص - س)}{ب س}}$

= $\frac{۲ ص (ص - ا)}{ا}$ جب $\frac{ا}{۲}$ =

$\frac{۲ ب س}{ا}$ جم^{۲} $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ا}{۲}$

= $\frac{ب س}{ا}$ جم $\frac{ا}{۲}$ جب ا

پہر ل جب θ = عمود اسے ب س پر

= ب جب س

∴ ل جب θ جم $\frac{ا}{۲}$ = ب جب س جم $\frac{ا}{۲}$ = $\frac{ب س}{ا}$ جب ا

جم ½ بموجب دفعہ ۱۶۸ کے

∴ ص (جب θ - جب ½) = ل جب θ جم ½

س ۲۱ تیسرا زاویہ مثلث کا برابر ہوگا π - θ - پ جبکہ زاویونکی جیبیں سلسلہ جمع

وتفریق میں ہو گئے ہوں

ہم رکھتے ہیں جب θ + جب پ = ۲ جب

(π - θ - پ) = ۲ جب (θ + پ)

∴ ۲ جب (θ+پ)/۲ جم (θ-پ)/۲ = ۴ جب (θ+پ)/۲

جم (θ+پ)/۲

∴ ۲ جم (θ+پ)/۲ = جم (θ-پ)/۲

∴ ۲ (جم θ/۲ جم پ/۲ - جب θ/۲ جب پ/۲) =

جم θ/۲ جم پ/۲ + جب θ/۲ جب پ/۲

اور جم θ/۲ جم پ/۲ = ۳ جب θ/۲ جب پ/۲

∴ جم² θ/۲ جم² پ/۲ = ۹ جب² θ/۲ جب² پ/۲

= ۹ (۱ - جم² θ/۲) (۱ - جم² پ/۲)

∴ ۹ (۱ - جم² θ/۲) (۱ - جم² پ/۲)

$$=\text{جم}^2\frac{\theta}{2}\,\text{جم}^2\frac{\text{پ}}{2}-\left(1-\text{جم}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\text{جم}^2\frac{\text{پ}}{2}\right)$$

$$=\text{جم}^2\frac{\theta}{2}+\text{جم}^2\frac{\text{پ}}{2}-1=\text{جم}^2\frac{\theta}{2}-\text{جب}^2\frac{\text{پ}}{2}$$

$$\therefore\ \text{جب}^2\frac{\theta}{2}\,\text{جب}^2\frac{\text{پ}}{2}=\text{جم}\frac{\theta+\text{پ}}{2}\,\text{جم}\frac{\theta-\text{پ}}{2}$$

$$\therefore\ 4\left(1-\text{جم}\,\theta\right)\left(1-\text{جم}\,\text{پ}\right)=2\,\text{جم}\frac{\theta+\text{پ}}{2}\,\text{جم}\frac{\theta-\text{پ}}{2}$$

$$=\text{جم}\,\theta+\text{جم}\,\text{پ}\quad \text{یا اسطرح پر}\quad \text{جم}\,\theta=\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2-\text{س}^2}{2\,\text{ا}\,\text{ب}}$$

$$\text{اور}\ \text{ب}=\frac{\text{ا}+\text{س}}{2}$$

$$\therefore\ \text{جم}\,\theta=\frac{\text{ا}-\text{س}}{\text{ا}}+\frac{\text{ب}}{2\text{ا}}=\frac{\text{ا}-\text{س}}{\text{ا}}+\frac{\text{ا}+\text{س}}{4\text{ا}}$$

$$=\frac{5\text{ا}-3\text{س}}{4\text{ا}}$$

$$\text{اسیطرح}\ \text{جم}\,\text{پ}=\frac{5\text{س}-3\text{ا}}{4\text{س}}\quad\text{اسجگہ}$$

$$4\left(1-\text{جم}\,\theta\right)\left(1-\text{جم}\,\text{پ}\right)=\frac{(3\text{س}-\text{ا})(3\text{ا}-\text{س})}{4\,\text{ا}\,\text{س}}$$

$$=\frac{10\,\text{ا}\,\text{س}-3\text{ا}^2-3\text{س}^2}{4\,\text{ا}\,\text{س}}$$

$$\text{اور}\ \text{جم}\,\theta+\text{جم}\,\text{پ}=\frac{5\text{ا}-3\text{س}}{4\text{ا}}+\frac{5\text{س}-3\text{ا}}{4\text{س}}$$

$$=\frac{10\,\text{ا}\,\text{س}-3\text{ا}^2-3\text{س}^2}{4\,\text{ا}\,\text{س}}$$

س ۳۲ جداگانہ نقاط ا، ب اور ج سے خطوط مستقیم مقابل کے

اضلاع سے نقاط د دی و ف سے ملتی ہوئے اسطرح کھینچو
کہ زاویہ ب ا د = زاویہ س ب ی = ا س ف = اَ
اور فرض کرو کہ خطوط مستقیمہ سے ل م ن ایک مثلث ایسا بنگیا ہے کہ
نقطے ا د ل و م و د ایک خط مستقیم پر ہین اور ب و م و ن
و ی دوسرے خط اور س و ن و ل و ف تیسرے
خط پر تب ل م ن مثلث ا ب س مثلث کے متشابہ
ہوگا کیونکہ

زاویہ م ل ن = زاویہ م ا س + زاویہ ل س ا =
ا - اَ + اَ = ا اسیطرح سے زاویہ ن م ل = ب اور
زاویہ ل ن م = س
اسیطرح سے مثلث ل م ن متساوی الزوایا ہوی اصلی مثلث
کے اور اسیواسطے اوسکی متشابہ ہے

پھر $\frac{\text{ب ن}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب ب س ن}}{\text{جب ب ن س}} = \frac{\text{جب (س - اَ)}}{\text{جب (π - س)}}$

$= \frac{\text{جب (س - اَ)}}{\text{جب س}}$ ∴ ب ن $= \frac{\text{ا جب (س - اَ)}}{\text{جب س}}$

اور $\frac{ب م}{ب اَ} = \frac{جب ب اَ م}{جب ب م اَ} = \frac{جب اَ}{جب (\pi - ب)} = \frac{جب اَ}{جب ب}$

$\therefore$ ب م $= \frac{س جب اَ}{جب ب}$ اسیطرح م ن $= \frac{اَ جب (س - اَ)}{جب س}$

جب اَ $\frac{اَ جب س}{جب ا جب ب}$ اَ جم اَ - اَ مم س جب اَ $= \frac{س جب اَ}{جب ب}$ -

$=$ اَ جم اَ - اَ مم س جب اَ -

جب اَ $\frac{اَ جب (ا + ب)}{جب ا جب ب}$ -

$=$ اَ جم اَ - اَ جب اَ (مم س + مم ب + مم اَ) اسکی
نسبت اَ سے وہی ہو جو کہ نسبت جملہ ذیل کے اکائی سے ہو

جم اَ - جب اَ (مم ا + مم ب + مم س)

س ۲۳ اَ بَ جم س - اَ سَ جم ب $= \frac{اَ^2 \; بَ^2 - سَ^2}{2}$

$\frac{اَ^2 + بَ^2 سَ^2 - بَ^2}{2} =$ بَ^2 - سَ^2

س ۲۴ اَ (اَ جم ب جم س + جم ا) $=$ اَ { مم ب مم س - جم (ب + س) }

= ا ÷ ب جب س = (ا / جب ا) جب ا جب ب جب س

اسیطرح ب (جم ا جم س + جم ب) = (ب / جب ب) جب ا جب ب جب س

اورس (جم ا جم ب + جم س) = (س / جب س) جب ا ×
جب ب جب س

اسیطرح سے یہہ تینون مثالین ۱۶۸ دفعہ کے بموجب برابر ہین ٭

س ۲۵ (بَ + سَ - اَ) مس ا/۲ = ۲ (ص - اَ) مس ا/۲

= ۲ (ص - اَ) × √[(ص - ب)(ص - س) / ص (ص - ا)] =

۲ √[(ص - ا)(ص - ب)(ص - س) / ص]

اسیطرح سے عمل کرنیسے دوسرے دو مثالین بتائین ہوئین یہی جملہ بالا کے برابر ہوسکتی ہین ٭

س ۲۶ بَ جم ب + سَ جم س = (اَ جب ب / جب ا) جب ب +
+ (اَ جب س / جب ا) جم س

= (اَ / ۲ جب ا) (جب ۲ ب + جب ۲ س) =

۲ اَ جب (ب + س) جم (ب ـ سَ)
―――――――――――――
۲ جب (ب + سَ)

= اَ جم (ب ـ س)

س ۲۷ ۱۷۰ دفعہ کے بموجب سَ جم ب + بَ جم س = اَ اور اَ
جم س + سَ جم ا = بَ
اور بَ جم اَ + اَ جم ب = سَ
اِسکے جمع کرنے سے سَ (جم ب + جم ا) + بَ
(جم ا + جم س) + اَ (جم س + جم ب) = اَ + بَ + سَ

س ۲۸ ک کو بجاے اَ / جب ا اور بَ / جب ب اور سَ / جب س جنکو ہم جانتے ہین
که باہم برابر ہین فرض کرو
(اَ^{۲} ـ بَ^{۲}) مم س + (بَ^{۲} ـ سَ^{۲}) مم اَ + (سَ^{۲} ـ اَ^{۲})
مم ب = ک^{۲} {(جب^{۲} ا ـ جب^{۲} ب) مم س + (جب^{۲} ب ـ
جب^{۲} س) مم ا + (جب^{۲} س ـ جب^{۲} ا) مم ب}
= ک^{۲} {جب (ا + ب) جب (ا ـ ب) مم س +
جب (ب + س) جب (ب ـ س) مم ا
+ جب (س + ا) جب (س ـ ا) مم ب}

= ک۲ {جب (ا − ب) جم س + جب (ب − س) جم ا
+ جب (س − ا) جم ب }
= − ک۲ {جب (ا − ب) جم (ا + ب) + جب (ب − س)
جم (ب + س) + جب (س − ا) جم (س + ا) }
= − ک۲/۲ {جب ۲ا − جب ۲ب + جب ۲ب − جب ۲س
+ جب ۲س − جب ۲ا } = ۰

س ۲۹ فرض کرو کہ ک سے وہی مراد ہے جو اوپر کے مثال میں تھے
(اَ − بَ) مم س/۲ + (سَ − اَ) مم ب/۲ + (بَ − سَ)
مم ا/۲
= ک {(جب ا − جب ب) مم س/۲ + (جب س − جب ا) مم ب/۲
+ (جب ب − جب س) مم ا/۲ }
۲ک {جب (ا−ب)/۲ جب (ا+ب)/۲ + جب (س−ا)/۲ جب (س+ا)/۲
+ جب (ب−س)/۲ جب (ب+س)/۲ }
= ۲ک {جب² ا/۲ − جب² ب/۲ + جب² س/۲ − جب² ا/۲ +
جب² ب/۲ − جب² س/۲ } = ۰

س ۳۰ ۱ − مس ا/۲ مس ب/۲ =

√{(ص - ب)(ص - س) / ص(ص - ا)} × √{(ص - ا)(ص - س) / ص(ص - ب)}

= ۱ - (ص - س)/ص = ۱ - (ا + ب - س)/(ا + ب + س) = ۲س/(ا + ب + س)

س ۱۳ (ا + ب + س)(جم ا + جم ب + جم س) =

= ا جم ا + ب جم ب + س جم س + ا جم ب + ب جم ا + ا جم س

+ س جم ا + ب جم س + س جم ب

= ا جم ا + ب جم ب + س جم س + س + ب + ا

۱۷۰ دفعہ کے بموجب

= ا (۱ + جم ا) + ب (۱ + جم ب) + س (۱ + جم س)

= ۲ا جم² ا/۲ + ۲ب جم² ب/۲ + ۲س جم² س/۲

س ۱۴ ک کی قیمت وہی ہے جو کہ ۲۰۸ مثال کے حل میں ہے تو

(جم ا جم ب)/(ا ب) + (جم ا جم س)/(ا س) + (جم ب جم س)/(ب س) =

۱/(۲ک) {(جم ا جم ب)/(جب ا جب ب) + (جم ا جم س)/(جب ا جب س) + (جم ب جم س)/(جب ب جب س)}

= ۱/(۲ک) {مم ا مم ب + مم ا مم س + مم ب مم س}

$$= \frac{1}{ک^{2}} \cdot \frac{\text{مس ا + مس ب + مس س}}{\text{مس ا مس ب مس س}} = \frac{1}{ک^{2}}$$

۶۸ دفعہ کے بموجب

$$= \frac{\text{جب}^{2}\,\text{ا}}{2\,\text{اَ}}$$

س ۳۳

$$\text{اَ جم ا + بَ جم ب + سَ جم س = اَ جم ا} + \frac{\text{اَ جب ب}}{\text{جب ا}}\,\text{جم ب} + \frac{\text{اَ جب س}}{\text{جب ا}}\,\text{جم س}$$

$$= \text{اَ جم ا} + \frac{\text{اَ (جب ۲ب + جب ۲س)}}{\text{۲ جب ا}} = \text{اَ جم ا} + \frac{\text{۲ اَ جب (ب + س) جم (ب − س)}}{\text{۲ جب ا}}$$

$$= \text{اَ جم ا + اَ جم (ب − س) = − اَ جم (ب + س) + اَ جم (ب − س)}$$

$$= \text{۲ اَ جب ب جب س}$$

س ۳۴

$$\frac{\text{۲ اَ جب ب جب س}}{\text{اَ + بَ + سَ}} = \frac{\text{۲ جب ب جب س}}{1 + \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}} + \frac{\text{سَ}}{\text{اَ}}} = \frac{\text{۲ جب ب جب س}}{1 + \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا}} + \frac{\text{جب س}}{\text{جب ا}}}$$

= ۲ جب ا جب ب جب س / (جب ا + جب ب + جب س) = ۲ جب ا جب ب جب س / (۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲)

بموجب مثال ۸ و ۱۶

= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب س/۲ = جم ا + جم ب + جم س − ۱

بموجب دفعہ ۶۸

∴ جم ا + جم ب + جم س = ۱ + ۲ اَ جب ب جب س / (اَ + بَ + سَ)

س ۲۵ اَ² − ۲ اَ بَ جم (۶۰° + س) = اَ² − ۲ اَ بَ (جم ۶۰° جم س − جب ۶۰° جب س)

= اَ² − اَ بَ جم س + ۲ اَ بَ جب ۶۰° جب س = اَ²

− (اَ² + بَ² − سَ²)/۲ = ۲ سَ بَ جب ۶۰° جب ا

= سَ² − (سَ² + بَ² − اَ²)/۲ + ۲ بَ سَ جب ۶۰° جب ا

= سَ² − بَ سَ جم ا + ۲ بَ سَ جب ۶۰° جب ا ہے

= سَ² − ۲ بَ سَ جم (۶۰° + ا)

س ۲۶ (بَ + سَ − اَ) / ۲ اَ = (جب ب + جب س − جب ا) / ۲ جب ا =

(۲ جب (ب + س)/۲ جم (ب − س)/۲ − ۲ جب ا/۲ جم ا/۲) / (۴ جب ا/۲ جم ا/۲)

$$= \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{س}}{۲} - \text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{س}}{۲} - \text{جم}\,\frac{\text{ب}+\text{س}}{۲}}{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$\text{پہر مم}\,\frac{\text{ا}}{۴} - \text{مق}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۴}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۴}} - \frac{۱}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}} =$$

$$= \frac{۲\,\text{جم}^۲\,\frac{\text{ا}}{۴} - ۱}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}} \quad \text{اور مم}\,\frac{\text{ب}}{۲} + \text{مم}\,\frac{\text{س}}{۲} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}}$$

$$+ \frac{\text{جم}\,\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ب}+\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۴} - \text{مق}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{مم}\,\frac{\text{ب}}{۲} + \text{مم}\,\frac{\text{س}}{۲}} = \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{ب}' + \text{س}' - \text{ا}'}{۲\,\text{ا}'}$$

س ۳۷

$$۴\,\text{ع}\,(\text{ع} - \text{جم}\,\tfrac{\text{ا}}{۲})(\text{ع} - \text{جم}\,\tfrac{\text{ب}}{۲})(\text{ع} - \text{جم}\,\tfrac{\text{س}}{۲}) =$$

$$\text{حاصل}\,\tfrac{۱}{۴}\,(\text{جم}\,\tfrac{\text{ا}}{۲} + \text{جم}\,\tfrac{\text{ب}}{۲} + \text{جم}\,\tfrac{\text{س}}{۲})(\text{جم}\,\tfrac{\text{ب}}{۲} + \text{جم}\,\tfrac{\text{س}}{۲}$$

$$- \text{جم}\,\tfrac{\text{ا}}{۲}) \times (\text{جم}\,\tfrac{\text{ا}}{۲} + \text{جم}\,\tfrac{\text{س}}{۲} - \text{جم}\,\tfrac{\text{ب}}{۲})$$

(جم ا/۲ + جم ب/۲ − جم س/۲) اب ان مثالونکی جگہہ ان نتایج کو رکہو جو کہ ۸ و ۱۰ و ۱۲ اور ۱۲ مین دی گئی ہین - اس طرح سے ہم حاصل کرینگے

{۸ جم (π − ا)/۴ جم (π − ب)/۴ جم (π − س)/۴ جم (π + ا)/۴ ×

جم (π + ب)/۴ جم (π + س)/۴}^{۲}

یعنی {۸ جم (π − ا)/۴ جم (π − ب)/۴ جم (π − س)/۴ جب (π − ا)/۴

جب (π − س)/۴}^{۲}

یعنی {جب (π − ا)/۲ جب (π − ب)/۲ جب (π − س)/۲}^{۲}

یعنی جم^{۲} ا/۲ جم^{۲} ب/۲ جم^{۲} س/۲

ش ۳۸ محیط = ا + ب + س، = س′ جب ا / جب س + س′ جب ب / جب س + س′

= س′ (جب ا + جب ب + جب س) / جب س = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲ / جب س

بموجب مثال ۸ و ۱۶

= ۲ جم ا/۲ جم ب/۲ ÷ جب س/۲ = ۲ جم ا/۲ جم ب/۲ ÷ جم (ا+ب)/۲ =

۲ جم ا/۲ جم ب/۲ قع (ا+ب)/۲

س ۳۹ فرض کرو کہ ح = ی جب² ا + و جب² ب = ز جب² ب + ی جب² س

= و جب² س + ز جب² ا السطح

ح (جب² س - جب² ا) = و جب² ب جب² س - ز جب² ا جب² ب

اور ح = و جب² س + ز جب² ا ∴ ح (جب² س - جب² ا) + ح جب² ب = ۲ و جب² ب جب² س

∴ ح جب (س - ا) جب (س + ا) + ح جب² ب = ۲ و جب² ب جب² س

∴ ح جب (س - ا) + ح جب (س + ا) = ۲ و جب ب جب² س ∴ و جب ب جب² س = ح جب س جم ا

∴ و = ح جم ا ÷ جب ب جب س = ح جب ۲ ا ÷ ۲ جب ا جب ب جب س

ایسا ہی ی = ح جب ۲ ب ÷ ۲ جب ا جب ب جب س

اور ز = $\dfrac{\text{ح جیب ۱ س}}{\text{۲ جیب ا جیب ب جیب س}}$

س ۴۰ چونکہ ا + ب + س = π

اس لئے ہم ظاہر کرتے ہین کہ ۸ جیب $\frac{\text{ا}}{۲}$ جیب $\frac{\text{ب}}{۲}$ جیب $\frac{\text{س}}{۲}$

اپنی سب سے بڑی قیمت رکھتا ہے جبکہ ا اور ب اور س سب باہم

برابر ہون کیونکہ جیب $\frac{\text{ا}}{۲}$ جیب $\frac{\text{ب}}{۲}$ = جیب ($\frac{\text{ا + ب}}{۴}$ + $\frac{\text{ا − ب}}{۴}$)

جیب ($\frac{\text{ا + ب}}{۴}$ − $\frac{\text{ا − ب}}{۴}$) = جیب² $\frac{\text{ا + ب}}{۴}$

− جیب² $\frac{\text{ا − ب}}{۴}$

اسی طرح س کے کوئی سے قیمت ہو کہ جیب $\frac{\text{ا}}{۲}$ جیب $\frac{\text{ب}}{۲}$ اپنی

سب سے بڑی قیمت رکھتا ہے جبکہ ا = ب

کیونکہ جیب $\frac{\text{ا + ب}}{۴}$ نہین بدلتا جبکہ ا اور ب اس طرح

بدلتے ہین جیسا کہ س متغیر نہو +

اس طریقہ مین ہم دیکھتے ہین کہ بڑی قیمت اس مثال کی اس

وقت ہے جبکہ تمام زوایا برابر ہون اور تب قیمت ۸ جیب³

$\frac{\pi}{۶}$ یعنے ایک ہے +

س ۴۱ ک سے وہی مراد ہے جو مثال ۲۸ کی حل مین ہے تو

۴ جیب (ب − س) جم (ب + س − ا) =

ک جب ا جب (ب − س) جم (۱۸۰° − ۲ ا)

= − ک جب (ب + س) جب (ب − س) جم ۲ ا

= ک (جب^2 ب − جب^2 س) (۲ جب^2 ا − ۱) =

۲ ک جب^2 ا (جب^2 ب − جب^2 س) − ک (جب^2 ب

− جب^2 س) اسیطرح باقی کی دو مثالین عمل کرنے سے

صورت بدل سکتے ہین ∴ اور تب سب کی سب صفر ہو جاینگی

کیونکہ جب^2 ا (جب^2 ب − جب^2 س) + جب^2 ب (جب^2 س

− جب^2 ا) + جب^2 س (جب^2 ا − جب^2 ب) = ۰

اور جب^2 ب − جب^2 س + جب^2 س − جب^2 ا +

جب^2 ا − جب^2 ب = ۰

س ۴

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جم ا}} = \frac{\text{جب ا جم ا + جب ب جم ب}}{\text{جم ا جم ب}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲ ا + جب ۲ ب}}{\text{۲ جم ا جم ب}}$$

$$= \frac{\text{۲ جب (ا + ب) جم (ا − ب)}}{\text{۲ جم ا جم ب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جم ا جم ب}} \times$$

(جم ا جم ب + جب ا جب ب)

= جب س + جم س مس ا مس ب مس س

اسیطرح $\frac{\text{جب ب}}{\text{جم س}} + \frac{\text{جب س}}{\text{جم ب}} = \text{جب ا} + \text{جم ا مس ا مس ب مس س}$

اور $\frac{\text{جب س}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جب ا}}{\text{جم س}} = \text{جب ب} + \text{جم ب مس ا} \times$
مس ب مس س

اِسجگہہ نتیجہ مطلوب کو جمع کرنے سے ہم نتیجۂ مطلوب حاصل کرتے ہین ✣

سوالات نمبر ۱۲

س ۱ — $\text{جب ا} = \frac{\text{ا}'}{\text{ب}'}\ \text{جب ب} = \frac{۵}{۲٫۵}\ ٫۲۵ = \frac{۱}{۲}$

$\therefore \text{ا} = ۳۰^\circ$ یا ۱۵۰°

س ۲ — فرض کرو کہ $\text{س}' = \frac{۱}{۲}\text{ب}'$ اور $\text{ا} = ۶۰^\circ$ تو بموجب دفعہ ۱۸۳

$\text{مس}\ \frac{۱}{۲}(\text{ب} - \text{س}) = \frac{\text{ب}' - \text{س}'}{\text{ب}' + \text{س}'}\ \text{مم}\ \frac{۱}{۲}\text{ا} = \frac{۱ - \frac{۱}{۲}}{۱ + \frac{۱}{۲}}\ \text{مم}\ ۳۰^\circ$

$= \frac{۱}{۳} . \sqrt{۳} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$

$\therefore \frac{۱}{۲}(\text{ب} - \text{س}) = ۳۰^\circ$ اور $\frac{۱}{۲}(\text{ب} + \text{س}) = ۶۰^\circ$

$\therefore \text{ب} = ۹۰^\circ$ اور $\text{س} = ۳۰^\circ$

س ۳ — فرض کرو کہ ا' و ب' و س' ظاہر کرتے ہین ضلعون کو علی الترتیب

$$\text{توجم ا} = \frac{ب^2 + س^2 - ا^2}{٢\,ب\,س} = \frac{٦ + (١+\sqrt{٣})^2 - ٤}{٢\,(١+\sqrt{٣})\sqrt{٦}}$$

$$= \frac{٦ + ٢\sqrt{٣}}{٢\,(١+\sqrt{٣})\sqrt{٦}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣}\,(١+\sqrt{٣})}{\sqrt{٦}\,(١+\sqrt{٣})} = \frac{١}{\sqrt{٢}} \quad \therefore ا = ٤٥^\circ$$

$$\text{جم ب} = \frac{ا^2 + س^2 - ب^2}{٢\,ا\,س} = \frac{٤ + (١+\sqrt{٣})^2 - ٦}{٤\,(١+\sqrt{٣})}$$

$$= \frac{٢ + ٢\sqrt{٣}}{٤\,(١+\sqrt{٣})} = \frac{١}{٢} \therefore ب = ٦٠^\circ$$

$$\text{جم س} = \frac{ا^2 + ب^2 - س^2}{٢\,ا\,ب} = \frac{٤ + ٦ - (١+\sqrt{٣})^2}{٤\sqrt{٦}} =$$

$$\frac{٦ - ٢\sqrt{٣}}{٤\sqrt{٦}} = \frac{٣ - \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٦}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \therefore س = ٧٥^\circ$$

س ٤ $\text{جب ب} = \frac{ب}{ا}\,\text{جب ا} = \frac{١٠٠}{٤٠} \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٤}$

لیکن یہہ ناممکن ہے کیونکہ کوئی جب اکائی سے زیادہ نہیں ہوسکتی ۔

س ٥ $\text{جب ب} = \frac{ب}{ا}\,\text{جب ا} = \frac{٤\,(١+\sqrt{٥})}{٤}\,\text{جب}\,١٨^\circ$

$$= \{١ + \sqrt{٥}\}\,\text{جب}\,١٨^\circ$$

= (١+√٥)(√٥−١)/٤ = ١ ∴ ب = ٩٠°

اِسی طرح س = ٢٠°، اور سَ² = بَ² − اَ²

= {٤ + √٨٠}² − ١٦

= ٨٠ + ٨√٨٠ = ١٦ {٥ + ٢√٥}

∴ سَ = ٤ √(٥ + ٢√٥)

جب ب = (بَ/اَ) جب ا = ((٤ + √٤٨)/٤) جب ١٥° — سؔ ٦

= (١ + √٣) (√٣ − ١)/(٢√٢) = ١/√٢

∴ ب = ٤٥° یا ١٣٥°

اگر ب = ٤٥° تو س = ١٢٠° اور سَ = اَ جب س / جب ا

= ٤ × (٢√٢)/(√٣ − ١) × √٣/٢

= ٤√٦/(√٣ − ١) = ٤√٦ (√٣ + ١)/٢ = ٢√٦ (√٣ + ١)

اگر ب = ١٣٥° تو س = ٣٠° اور سَ = اَ جب س / جب ا

= ٤ × (٢√٢)/(√٣ − ١) × ١/٢

= ٤√٢/(√٣ − ١) = ٤√٢ (√٣ + ١)/٢ = ٢√٢ (√٣ + ١)

س۷ دفعہ ۱۸۸ کی پہلے شکل مین ہم سَ کو مساوی کہتے ہین ا ب

اور سً = ا بً

اِسیطرح سَ = بَ جم ا − اَ جم س ب بً اور سً

= بَ جم اَ + اَ جم س ب بً

∴ سَ + سً = ۲ بَ جم ا

اور سَ سً = بَ۲ جم۲ ا − اَ۲ جم۲ س ب بً

= بَ۲ جم۲ ا − اَ۲ جم۲ ب

= بَ۲ (۱ − جب۲ ا) − اَ۲ (۱ − جب۲ ب)

= بَ۲ − اَ۲

اِسجگہ (سَ + سً)۲ = ۴ بَ۲ جم۲ ا

۴ سَ سً جم۲ ا = ۴ (بَ۲ − اَ۲) جم۲ ا ∴ سَ۲ + ۲ سَ سً

+ سً۲ − ۴ سَ سً جم۲ ا = ۴ اَ۲ جم۲ ا

یعنی سَ۲ − ۲ سَ سً جم ۲ ا + سً۲ = ۴ اَ۲ جم۲ ا

ش مثال بالا کی حل کی طرف متوجہ ہونے سے چھوٹے مثلث

کا رقبہ سَ/۲ ب جب ا ہے اور بڑے کا رقبہ سً/۲ ب جب ا

اِسجگہ حاصل جمع رقبون کی = ½ (سَ + سً) ب جب ا

= بَ جب ا جم ا

س ۹ دو اوپر کی مثالون کے حل کی طرف متوجہ ہونے سے ہم رکھتے ہین جب س ا / جب ب ا = سَ / بَ اور جب س ۲ / جب ب ۲ = سً / بَ

∴ جب س س / جب ب ا + جب س ۲ / جب ب ۲ = (سَ + سً) / ب

= ۲ بَ جم ا / بَ = ۲ جم ا

س ۱۰ آٹھوین مثال کے حل کرنے کے مانند ہم رکھتے ہین

۱/۲ سً بَ جب ا = ن/۲ سَ بَ جب ا

∴ سً = ن سَ

اور ساتوین مثال کیطرح

(سَ + سً) / (سً − سَ) = ۲ بَ جم ا / ۲ اَ جم س ب بً

∴ بً / اَ = (ن + ا) / (ن − ا) × جم س ب بً / جم ا

لیکن زاویہ س ب بً بڑا ہے بہ نسبت ا کے

∴ جب س ب بً / جم ا کم ہے اکائی سے

یہان بً / اَ کم ہے (ن + ا) / (ن − ا) سے

س ١١ $\text{جب ب} = \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}\,\text{جب ا} \;\therefore\; \text{ل جب ب} - ١٠ =$

$\text{لوگ بَ} + \text{ل جب ا} - ١٠ - \text{لوگ اَ}$

اِسیطرح اگر $\text{لوگ اَ} + ١٠ = \text{لوگ بَ} + \text{ل جب ا}$

تو ہم رکھتے ہین $\text{ل جب ب} - ١٠ = ٠$

$\therefore\; \text{ل جب ب} = ١٠ \;\therefore\; \text{لوگ جب ب} = ٠$

$\therefore\; \text{جب ب} = ١ \;\therefore\; \text{ب} = ٩٠^\circ$ اور مثلث مشتبہ نہین ہے

س ١٢ $\frac{\text{اَ} + \text{بَ}}{\text{سَ}} = \frac{\text{جب ا} + \text{جب ب}}{\text{جب س}} = \frac{٢\,\text{جب}\,\frac{١}{٢}(\text{ا}+\text{ب})\,\text{جم}\,\frac{١}{٢}(\text{ا}-\text{ب})}{٢\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جم}\,\frac{\text{س}}{٢}}$

$\therefore\; \frac{\text{جم}\,\frac{١}{٢}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جب}\,\frac{١}{٢}\,\text{س}}$

$\therefore\; \text{جم}\,\frac{١}{٢}\,(\text{ا} - \text{ب}) = \frac{(\text{اَ} + \text{بَ})\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{٢}}{\text{سَ}}$

اب معلوم ہوتا ہے کہ $\text{جم}\,\theta = \frac{\text{اَ} - \text{بَ}}{\text{سَ}}$

$\therefore\; \text{جب}^٢\,\theta = \frac{\text{سَ}^٢ - (\text{اَ} - \text{بَ})^٢}{\text{سَ}^٢} = \frac{\text{اَ}^٢ + \text{بَ}^٢ - ٢\,\text{اَبَ}\,\text{جم س} - (\text{اَ}-\text{بَ})^٢}{\text{سَ}^٢}$

$= \frac{٢\,\text{اَبَ}\,(١ - \text{جم س})}{\text{سَ}^٢} = \frac{٤\,\text{اَ}\,\text{بَ}}{\text{سَ}^٢}\,\text{جب}^٢\,\frac{\text{س}}{٢}$

$\therefore\; \text{جب}\,\theta = \frac{٢\sqrt{\text{اَبَ}}}{\text{سَ}} \cdot \text{جب}\,\frac{\text{س}}{٢} \;\therefore$

جم ½ (ا − ب) = (اَ + بَ) جب ٥ / ۲ √(اَ بَ)

اور جب ٥ = ۲ √(اَ بَ) / سَ جب س/۲ = ۲ √(اَ بَ) / سَ جم ½ (ا + ب)

∴ جم ½ (ا + ب) = سَ جب ٥ / ۲ √(اَ بَ)

س ۱۳ سَ² = اَ² + بَ² − ۲ اَ بَ جم س = اَ² + بَ²

− ۲ اَ بَ (۱ − ۲ جب² س/۲) = (اَ − بَ)² + ۴ اَ بَ

جب² س/۲ = (اَ − بَ)² + (اَ − بَ)² مس² پ

= (اَ − بَ)² {۱ + مس² پ} = (اَ − بَ)² قع² پ

س ۱۴ اِسجگہ ص = ۳۰ اور ص − اَ = ۱۲ اور ص − بَ = ۱۰

اور ص − سَ = ۸

مس ½ ا = √((ص − بَ)(ص − سَ) / ص (ص − ا)) = √(۱۰ × ۸ / ۳۰ × ۱۲)

= √(۸/۳۶) = √(۲/۹)

اِس لئے ل مس ½ ا = ۱۰ + لوگ ص √(۲/۹) = ۱۰

+ ½ لوگ ۲ − لوگ ۳ = ۹٫۶۷۳۳۹۳۷

س ۱۵ سب سے بڑا زاویہ ۶۶ والے ضلع کے سامنے ہے

فرض کرو کہ یہہ زاویہ س ہے

تو مم $\frac{س}{۲} = \sqrt{\frac{ص(ص-س)}{(ص-اَ)(ص-بَ)}}$

یہاں ص = ۶۹ اور ص - اَ = ۳۷ اور ص - بَ = ۲۹

اور ص - سَ = ۳ ∴ مم $\frac{س}{۲} = \sqrt{\frac{۳ \times ۶۹}{۲۹ \times ۳۷}} = \sqrt{\frac{۲۰۷}{۱۰۷۳}}$

∴ ل مم $\frac{س}{۲}$ = ۱۰ + لوگ $\sqrt{\frac{۲۰۷}{۱۰۷۳}}$ =

۱۰ + $\frac{۱}{۲}$ (لوگ ۲۰۷ - لوگ ۱۰۷۳) = ۹٫۶۴۲۶۰۵۳

۹٫۶۴۲۶۰۵۳

۰٫۰۰۰۳۴۳۱ : ۰٫۰۰۰۲۵۱۱ :: ۶۰ً : وً

۹٫۶۴۲۳۳۴۲

۰٫۰۰۰۲۵۱۱ ∴ وً = ۴۴ً

∴ $\frac{س}{۲}$ = ۶۶° ۱۸َ - ۴۴ً = ۶۶° ۱۷َ ۱۶ً

∴ س = ۱۳۲° ۳۴َ ۳۲ً

س ۱۶ ص = $\frac{۱۵}{۲}$ اور ص - اَ = $\frac{۷}{۲}$ اور ص - بَ = $\frac{۵}{۲}$

اور ص - سَ = $\frac{۳}{۲}$

جم $\frac{ب}{۲} = \sqrt{\frac{ص(ص-بَ)}{اَسَ}} = \sqrt{\frac{۵ \times ۱۵}{۱۲ \times ۸}}$

= √(۲۵/۳۲) = √(۱۰۰/(۲)^۷)

ل جم ب/۲ = ۱۰ + لوگ √(۱۰۰/(۲)^۷) = ۱۰ + ½ (لوگ ۱۰۰ − لوگ ۲^۷)

= ۱۰ + ۱ − ۷/۲ لوگ ۲ = ۹٫۹۴۶۳۹۵۰

۹٫۹۴۶۴۰۴۰

۹٫۹۴۶۳۹۵۰ ۰٫۰۰۰۰۶۶۹ : ۰٫۰۰۰۰۰۹۰ :: ۶۰″ : د

۰٫۰۰۰۰۰۹۰ ∴ د = ۸

∴ ب/۲ = ۶۲° ۷′ ۸″ ∴ ب = ۱۲۴° ۱۴′ ۱۶″

مث ۱۷ اسجگہہ اَ = ۶ اور ص = ۹ اور ص − اَ = ۳

اسلئے جم اَ/۲ = √(۳×۹/۶×۵) = √(۳/۵) = √(۶/۱۰)

اسلئے ل جم اَ/۲ = ۱۰ + لوگ √(۶/۱۰) = ۱۰ + ½ (لوگ ۶ − لوگ ۱۰)

= ۱۰ + ½ لوگ ۶ − ½ = ۹٫۸۸۹۰۷۵۶

۹٫۸۸۹۰۷۵۶

۹٫۸۸۹۰۶۴۴ ۰٫۰۰۰۱۰۳۲ : ۰٫۰۰۰۱۱۲ :: ۶۰″ : د

۰٫۰۰۰۱۱۲ ∴ د = ۶٫۵

اسلئے ج/۲ = ۹° ۳۴' ۱۰" − ۵٫۶۵" = ۹° ۳۴' ۱۵٫۳۵"

∴ ج = ۱۸° ۷' ۲۷٫۷"

س ۱۸ بموجب دفعہ ۱۹۲ کے

مس ۱/۲ (ب − س) = (۱۸ − ۲)/(۱۸ + ۲) ضم ج/۲ = ۸/۱۰ ضم ۹° ۳۴' ۱۵"

اسلئے ل مس ۱/۲ (ب − س) = ل ضم ۹° ۳۴' ۱۵"

+ لوگ ۸ − لوگ ۱۰

= ل ضم ۹° ۳۴' ۱۵" + ۳ لوگ ۲ − ۱ = ۱۰٫۷۷۳۶۱۳۸۱

۱۰٫۱۸۶۶۱۳۳ ۲۷۳۰ : ۲۸۴۰ :: ۰۰۰۲۳۴۶ : ۰۰۰۲۷۴۳ : ۰۰۰۲۳۴۶ :: ۶۰" : ل"

۱۰٫۱۸۶۳۷۶۹

۰۰۰۲۳۴۶ ٫۰۰۰ ٫۰۰۰ = ۵۱

اس لئے ۱/۲ (ب − س) = ۶۵° ۵۱' ۵۱"

اور ۱/۲ (ب + س) = ۸۰° ۲۵' ۴۵" اسلئے ب = ۱۴۶° ۱۷' ۳۶"

اگ اور س = ۱۴° ۳۳' ۵۴"

س ۱۹ مس ۱/۲ (ب − س) = (۹ − ۷)/(۹ + ۷) ضم ج/۲ = ۱/۸ ضم ۲۳° ۳' ۶"

اسلئے ل مس ۱/۲ (ب − س) = ل ضم ۲۳° ۳' ۶" − لوگ ۸

= ل مس ۷° ۴۵' ۵۳" = ۳ لوگ ۲ = ۹٫۲۹۹۴۳۵۵

	۹٫۲۹۹۹۸۰۴ ۹٫۲۹۹۴۳۵۵ ۹٫۲۹۹۳۲۱۶ ۹٫۲۹۹۳۲۱۶ ——————— ——————— ۰٫۰۰۰۶۵۸۸ ۰٫۰۰۰۱۱۳۹ ۰٫۰۰۰۶۵۸۸ : ۰٫۰۰۰۱۱۳۹ :: ″۶۰ : ″لا ∴ لا = ۱۰٫۴ اسلئے $\frac{۱}{۲}$ (ب − س) = °۱۱ ′۱۴ ″۱۰ اور $\frac{۱}{۲}$ (ب + س) = ۵۷ ۴۵ ک اسلئے ب = °۶۹ ′۱۰ ″۱۰ اور س = °۴۶ ′۳۷ ″۵۰
س ۲۰	مس $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب) = $\frac{ا - ب}{ا + ب}$ مم $\frac{س}{۲}$ = $\frac{۳۵ - ۷۰}{۳۵ + ۷۰}$ × مم $\frac{س}{۲}$ = $\frac{۱}{۳}$ مم °۱۸ ′۲۶ ″۶ اسلئے ل مس $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب) = ل مم °۱۸ ′۲۶ ″۶ − لوگ ۳ = ۱۰ اسلئے لوگ مس $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب) = ۰ اسلئے مس $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب) = ۱ ∴ $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب) = °۴۵ اور $\frac{۱}{۲}$ (ا + ب) = °۷۱ ′۳۳ ″۵۴ ∴ ا = °۱۱۶ ′۳۳ ″۵۴ اور ب = °۲۶ ′۳۳ ″۵۴
س ۲۱	مس $\frac{۱}{۲}$ (ب − س) = $\frac{۹ - ۷}{۹ + ۷}$ مم $\frac{ا}{۲}$ = $\frac{۱}{۸}$ مم °۳۲ ′۲۳ ″۳۰

اسلئے ل مس ½ (ب – س) = ل مم ۳۴° ۲۲′ ۴۰″ – لوگ ۲

= ل مس ۶۹° ۱۱′ ۰″ – ۲ لوگ ۲ = ۹۶۴۵۴۳۰۴۲۲

۹۶۴۸۴۳۰۴۲

۹۶۴۵۴۱۴۷۶

۶۰۰۰۱۵۰۴۳

۹۰۰۰۰۴۰۰۶۰۰۰۱۵۰۴۳ : ۰۰۰۰۶۰۰۰ : ۲۰ =

اسلئے ½ (ب – س) = ۱۵° ۳′ ۲″

اور ½ (ب + س) = ۶۹° ۱۱′ ۳۰″ : ب = ۸۴° ۱۰′ ۵″

اور س = ۵۴° ۸′ ۱۰″

۲۲ مس ½ (اَ – بَ) = $\frac{اَ - بَ}{اَ + بَ}$ مم $\frac{س}{۲}$ = $\frac{۳۰ - ۲۰}{۳۰ + ۲۰}$ مم $\frac{س}{۲}$

= $\frac{۲}{۱۰}$ مم ۱۱°

اسلئے ل مس ½ (اَ – ب) = ل مم ۱۱° + لوگ ۲ – لوگ ۱۰

= ل مم ۱۱° + لوگ ۲ – ۱

۱۰۶۰۱۲۳۷۷۷ =

۱۰۶۰۱۲۳۸۲۱	۱۰۶۰۱۲۳۷۷۷
۱۰۶۰۱۲۱۳۹۴	۱۰۶۰۱۲۱۲۹۴
۶۰۰۰۲۵۲۷	۶۰۰۰۱۳۸۳

٦٢٥٢٠٠٠٦ : ٣٨٤٢٠٠٠١ : ٤٠″ : ٩٫٥٥ = ا٥

نسلئہ ½ (ا − ب) = ٥° ٤٠ ٤′ ٩ ٥″

اور ½ (ا + ب) = ٩٥° ∴ ا = ٤٢° ١٨ ٣′ ٩ ٥″ اور ب

= ٣٢° ١١ ١″

س ٢٢ — مس ½ (ب − س) = (ب − س)/(ب + س) مم ا/٢ = ٣/٢٥ مم ٢٠°

= ٣ ماس/٢٥

∴ ل مس ½ (ب − س) = ١٠ + لوگ ٣ ماس/٢٥ = ١٠ +

٣/٢ لوگ ٣ − لوگ ٢٥

= ١٠ + ٣/٢ لوگ ٣ − لوگ ١٠٠/٤ = ١٠ + ٣/٢ لوگ ٣

− ٢ + ٢ لوگ ٢

= ٩٫٤١٦٣١٩

∴ ½ (ب − س) = ١٤° ٤٤′ ٩ ٢″

اور ½ (ب + س) = ٤٠° ∴ ب = ٥٤° ٤٤′ ٩ ٢″

س ٢٣ — فرض کرو کہ ا = ٧ اور ب = ٨ اور س = ٩ اور ص = ١٢ اور ص − ا

= ٥ اور ص − ب = ٤ اور ص − س = ٣

مس ا/۲ = √((ص − ب)(ص − ج) / ص (ص − ا)) = √(۳ × ۴ / ۵ × ۱۲) =

√(۱/۵) = √(۲/۱۰)

لمس ا/۲ = ۱۰ + لوگ √(۲/۱۰) = ۱۰ + ½ (لوگ ۲ − لوگ ۱۰)

= ۱۰ + ½ (لوگ ۲ − ۱) = ۹٫۶۵۰۵۱۵۰

۹٫۶۵۰۵۶۳۴	۹٫۶۵۰۵۱۵۰
۹٫۶۵۰۵۰۶۹	۹٫۶۵۰۵۰۶۹
٫۰۰۰۰۵۶۵	٫۰۰۰۰۰۸۱

٫۰۰۰۰۵۶۵ : ٫۰۰۰۰۰۸۱ :: ۶۰″ : و ∴ و = ۱٫۵

اس لئے ا/۲ = ۲۴° ۵′ ۱۱″٫۵ ∴ ا = ۴۸° ۱۱′ ۲۳″

مس ب/۲ = √((ص − ا)(ص − ج) / ص (ص − ب)) = √(۳ × ۵ / ۴ × ۱۲)

= √(۵/۱۶) = √(۱۰/۳۲)

لمس ب/۲ = ۱۰ + لوگ √(۱۰/۳۲) = ۱۰ + ½ (لوگ ۱۰ −
لوگ ۳۲)

= ۱۰ + ½ − ۵/۲ لوگ ۲ = ۹٫۷۴۷۴۸۵۰

۹٫۷۴۷۴۴۷۷ ۹٫۷۴۷۴۲۵۰

۹٫۷۴۷۴۱۸۳ ۹٫۷۴۷۴۱۸۳

٫۰۰۰۰۴۹۴ ٫۰۰۰۰۰۰۶۷

٫۰۰۰۰۴۹۴ : ٫۰۰۰۰۰۶۷ :: ″۱۰۰ : ″و ∴ و = ۱٫۵

∴ ب/۲ = ۲۹° ۱۲′ ۱٫۵″ ∴ ب = ۵۸° ۲۴′ ۳″ ۰

اِس جگہ س = ۱۸۰° − ۸۶° ۱۱′ ۳۳″ − ۵۸° ۲۴′ ۳″

= ۳۷° ۲۳′ ۴۵″

۲۹ کی مانند ہم رکھتے ہین جب (۴۵° − ب/۲) = √((۱ − جب ب)/۲) | س ۲۵

= √(½ (۱ − ۳/۶۹۵۳))

= √(½ × ۶۹۵۵/۶۹۵۳) = √(۳۴۷۵/۶۹۵۳)

∴ ل جب (۴۵° − ب/۲) = ۱۰ + لوگ √(۳۴۷۵/۶۹۵۳)

= ۱۰ + ½ لوگ (۳۴۷۵ − لوگ ۶۹۵۳) = ۱۰ − ½

(٫۳۰۱۲۱۷۴)

= ۹٫۸۴۹۳۹۱۳

۹٫۸۴۹۳۹۱۳

۹٫۸۴۹۳۹۰۲ ٫۰۰۰۰۰۲۱ : ٫۰۰۰۰۰۱۱ :: ″۶۰ : ″ر

٫۰۰۰۰۰۱۱ ∴ ر = ۳۱

∴ ۵۴° − ب/۲ = ۴۴° ۹′ ۱۵٫۵″ ∴ ب/۲ = ۵٫۳۴″

∴ ب = ۱′ ۹ ۲″

س ۲۶ فرض کرو کہ بَ = ۱۰۰ اور سَ = ۸۰

مس ۱/۲ (ب − س) = (بَ − سَ)/(بَ + سَ) مم ۱/۲ ج = ۱/۹ مم ۰° ۳ =

۳/۹ √۳ = ۳/۳ ۳/۲

∴ ل مس ۱/۲ (ب − س) = ۱۰ + لوگ (۳)^(۳/۲) − ۱۰ =

۳/۲ لوگ ۳ = ۹٫۲۸۴۳۲

∴ ۱/۲ (ب − س) = ۱۰° ۵′ ۳۶″ اور ۱/۲ (ب + س)

= ۶۰° ∴ ب = ۷۰° ۵′ ۳۶″ اور س = ۴۹° ۵۴′ ۲۴″

س ۲۷ فرض کرو کہ بَ = ۵ اور سَ = ۳

مس ۱/۲ (ب − س) = (بَ − سَ)/(بَ + سَ) مم ۱/۲ ج = ۱/۴ مم ۶۰°

= ۱/(۴√۳) = ۱/√۴۸

∴ ل مس ۱/۲ (ب − س) = ۱۰ + لوگ ۱/√۴۸ − ۱۰ =

۱/۲ لوگ ۴۸ = ۱۰ − ۱/۲ (۱۱۶۸۱۲۴۱۲) = ۹٫۱۵۹۳۷۶۴

٩٫١٥٩٣٧٩٤

ق : ٥٠ :: ٢٫٠٠٠٧٠٨٨ : ٢٫٠٠٠٨٩٣٠

٩٫١٥٨٦٧٠٦

٢٫٠٠٠٧٠٨٨ ∴ و = ٤٨

∴ ½ (ب − س) = ٨° ١٢′ ٨″ اور ½ (ب + س) = ٣٠°

∴ ب = ٣٨° ١٢′ ٨″ اور س = ٢١° ٤٧′ ٥٢″

فرض کرو کہ ا ب س د مربع قاعدہ کو ظاہر کرتا ہے اور پ سمت الراس ہے پ ق عمود زمین پر کھینچا ہوا فرض کرو اور ق سے ق ر عمود ا ب پر کھینچو ش ٢٨

فرض کرو کہ پ ظاہر کرتا ہے رقم مطلوبہ کو تو مس پ = پ ق / ق ر

اب ق ر = ١٠٠ نیز (پ ق)^2 + (ق ر)^2 = (پ ر)^2

اور (پ ر)^2 + (ا ر)^2 = (ا پ)^2

اسیطرح (پ ق)^2 = (پ ر)^2 − (ق ر)^2 =

(ا پ)^2 − (ا ر)^2 − (ق ر)^2 = (١٥٠)^2 − (١٠٠)^2

= ٢٥٠٠

∴ پ ق = ٥٠

∴ مس پ = ۵۰/۱۰۰ = ۱/۲

انجگہ ل مس پ = ۱۰ + لوگ ۱/۲ = ۱۰ − لوگ ۲

= ۹٫۶۹۸۹۷

۹٫۶۹۹۰۰　　۹٫۶۹۸۹۷

۹٫۶۹۸۶۸　　۹٫۶۹۸۶۸

٫۰۰۰۳۲　　٫۰۰۰۲۹

٫۰۰۰۳۲ : ٫۰۰۰۲۹ :: ۶۰″ : ثہ = ۵۴

∴ پ = ۲۶° ۳۳′ ۵۴″

و مس ۱/۲ (ا − پ) = (ا − ب)/(ا + ب) مم ۳۳/۲ = (۱ − ۱ ۲/۹)/(۱ + ۱ ۲/۹) ×

مم ۰٫۳° = ۱/۱۰ مم ۰٫۳° = ۳۳/۱۰

∴ ل مس ۱/۲ (ا − ب) = ۱۰ + لوگ ۳۳/۱۰ =

۱۰ + ۱/۲ لوگ ۳ − ۱ = ۹٫۲۳۸۵۶۰۶

ابل مم ۹° ۹′ = ۱۰٫۷۶۱۸۵۹۷

اور جبکہ مس ۵ × مم ۵ = ا تو ہم رکھتے ہین

لوگ مم ۵ + لوگ مس ۵ = ۰

∴ ل مس ۵ − ۱۰ + ل مم ۵ − ۱۰ = ۰

∴ ل مس ۵ = ۲۰ − ل مم ۵

اسیطرح ل‌سں ۹° ۹′ = ۹٫۲۳۸۱۲۰۳

۹٫۲۳۸۵۶۰۶

۰٫۰۰۰۵۱۴ : ۰٫۰۰۰۳۴۰۳ :: ۶۰″ : و″

۹٫۲۳۸۱۲۰۳

۰٫۰۰۰۳۴۰۳ ∴ و = ۳۵

∴ ½ (ا − ب) = ۹° ۹′ ۳۵″ اور ½ (ا + ب) = ۶۰°

∴ ا = ۶۹° ۹′ ۳۵″ اور ب = ۵۰° ۱۰′ ۲۵″

س ۳۰ جب س = (سَ / اَ) جب ا اور ل جب س = ل جب ا + لوگ سَ − لوگ اَ

= ل جب ا + لوگ ۳ − لوگ ۲ = ۹٫۵۲۲۸۷۸۷ + ۰٫۴۷۷۱۲۱۳ − لوگ ۲

= ۱۰ − لوگ ۲ ∴ لوگ جب س = − لوگ ۲ = لوگ ½

∴ جب س = ½ ∴ جب س = ۳۰° اور ۱۵۰°

س ۳۱ فرض کرو کہ س ظاہر کرتا ہے قاعدہ کو ـ اور ع ارتفاع معلوم کو بموجب دفعہ ۱۶۸ کے بائین طرف کی شکل کو ہم رکھتے ہین مم ب = (ب د / ع) اور مم س = (س د / ع)

∴ مم ب + مم س =

$$\frac{\text{ب و + س و}}{\text{ح}} = \frac{\text{سَ}}{\text{ح}} \ldots\ldots (1)$$

نیز ب — س فرضاً ہمیں معلوم ہے

∴ مم (ب — س) بہی معلوم ہوگئی اس کو مَم سے تعبیر

کرو ∴ $$\frac{\text{مم ب — مم س}}{\text{1 + مم ب مم س}} = \text{م} \ldots\ldots (2)$$

پہلی اور دوسری مساوات سے ہم مم اٗ اور مم بٗ معلوم کر سکتے ہیں +

فرض کرو کہ اٗ اور بٗ اور سٗ ضلعوں کو ظاہر کرتے ہیں اور ل اور م اور ن جداگانہ مقابل کے زاویوں سے ان پر عمود ہیں تو اٗ ل = بٗ م = سٗ ن اس لئے کہ ہر ایک اِن مثلثوں میں سے مثلث کا دوگنہ رقبہ ظاہر کرتا ہے اس لئے اضلاع ا اور ب اور س عمودہائے ل اور م اور ن سے معکوساً متناسب ہیں اسیطرح اضلاع کی نسبتیں معلوم ہوگئیں اور اس لئے مثلث کے زاویہ بہی دفعہ، اسکے ذریعہ سے معلوم ہوسکتے ہیں تب ضلعوں کے حقیقی طول دریافت کر سکتے ہیں کیونکہ ل = سٗ جب ب اور ل اور ب معلوم س ۱۱۳

ہین لپس سؔ معلوم ہو جائیگا

تب اؔ اور بؔ نتیجہ سے معلوم ہو سکتی ہین جبکہ ضلعون کے

نسبتین معلوم ہین ❊

باب چہاردہم

س ۱ دیکھو دفعہ ۱۹۳ کی شکل کو زاویہ پ ب س = ۹۰°

اور زاویہ ب ا س = ۳۰° ∴ ا پ ب = ۳۰°

نیز ا ب = ۴۰ فٹ چونکہ پ ا ب زاویہ = ا پ ب زاویہ

تو ہم رکھتے ہین پ ب = ا ب = ۴۰ تب پ

س = پ ب جب ۶۰° = ۴۰ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ۲۰ $\sqrt{3}$

اور ب س = ب پ جم ۶۰° = ۴۰ × $\frac{1}{2}$

= ۲۰

س ۲ فرض کرو کہ اس بڑہانے سے سؔ مین گذر کر اس افقے سطح

سے جو کہ بؔ کو شامل ہے نقطہ د پر ملتا ہے تب زاویہ ا ب د

= ۶۰° اور زاویہ س ب د = ۳۰° ∴ زاویہ ا ب س

= ۳۰° اور ا س ب = ۵ ۳۰° اسلئے زاویہ ب ا س

= ١٨٠° − ٣٠° − ١٣٥° = ١٥°

اب / بس = جب اس ب / جب ب اس = جب ١٣٥° / جب ١٥°

= ١/√٢ ÷ (√٣ − ١)/(٢√٢)

= ٢/(√٣ − ١) ∴ اب = (١٧٦٠ × ٢)/(√٣ − ١) گزون کے

اور پہاڑ کی بلندی = اب جب ٦٠° = اب √٣/٢

= (١٧٦٠ √٣)/(√٣ − ١) =

= (١٧٦٠ √٣ (√٣ + ١))/((√٣ − ١)(√٣ + ١)) = (١٧٦٠ √٣ (√٣ + ١))/٢

= ٨٨٠ (√٣ + ٣)

س٣ فرض کرو کہ ح ظاہر کرتا ہے بلندی مینار کی گزون مین تب

ح/١٠٠ = مس ٣٠° = ١/√٣ ∴ ح = ١٠٠/√٣

س٤ فرض کرو کہ ح ظاہر کرتا ہے بلندی مینار کی اور اُسکے جڑہ کے فاصلہ کو د ظاہر کرتا ہے اور یَ ب سے جڑہ کے فاصلہ کو ، تو د = ح مم ٣٠° اور یَ = ح مم ٦٠° لیکن یَ² − د²

= ر۲ ∴ ج۲ (مم۲ ۸۰ — مم۲ ۳۰)

= ر۲ ∴ ج۲ { ۳۰ — (۱۰ + ۲ ک) / (۱ — ک)۲ } = ر۲

∴ ج۲ (۳ — (ک + ۵) / (ک — ۳)) = ر۲ ∴ ۳ ج۲ (ک — ۱)

= ر۲ (ک — ۳) ∴ ج۲ = (ک۲ — ۳) / ۳ (ک — ۱) ر۲ = (ک + ۳) (ک — ۳) / ۳ (ک + ۳) (ک — ۱) ر۲

= ۳ ر۲ / ۳ (ک۲ + ۲) = ر۲ / (ک۲ + ۲)

س ۵ فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے آنکھ دیکھنے والیکی آنکھ کو اور ب غبارہ کے وسط کو ظاہر کرتا ہے تو زاویہ ا ان خطوط مستقیم سے بنایا گیا ہے جو کہ غبارہ کو مس کرتے ہوئے ایسے عمودی سطح مین کھینچے گئے ہین جو کہ ب کو شامل ہے

∴ ر / ا ب = جب ۱ / ۲

∴ ا ب = ر مق ۱ / ۲ اور غبارہ کی مرکز کی بلندی

∴ ا ب جب ط = ر مق ۱ / ۲ اور بلندی وسط بیلن کی = ا ب جب ب = ر جب ب کم ۱ / ۲

س ۶ فرض کرو کہ د ظاہر کرتا ہے اس جگہ کو جو کہ اوسی خط مستقیم میں ہے جس مین ا و ب ہین اور فرض کرو کہ ب ایک جگہہ اس خط مستقیم مین ہے جس مین ا و س ہین اور ن ایک جگہہ اس خط مستقیم

مین ہے جسمین بَ وسَ ہین تو وَ اور پَ اور قَ ایک
ایسے خط مستقیم ہین ہین جو کہ اَ بَ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

اور فرض کرو کہ و پ = پَ اور و ق = قَ

فرض کرو کہ ا پ و = اَ اور پ ق و = بَ

تو و ا = پَ مس اَ اور و ب = قَ مس بَ

اِسیطرح ا ب = قَ مس بَ - پَ مس اَ

اور مثلث ا ب س کے زاوی معلوم ہین اسواسطے کہ

ا ب ق = π/٢ - بَ اور و ا پ = π/٢ - اَ

اس لئے ا س اور ب س معلوم کر سکتے ہین -

سو | اس زاویہ کی مس جسکو د ب ی پر بناتا ہے = ا ب / ا ی اور
مس اس زاویہ کے جسکو س د ی پر بناتا ہے ٥

= س د / س ی ∴ ا ب / ا ی = س د / س ی ∴ س ی = (ا ی × س د) / ا ب ∴ (س ی)٢ =

((ا ی)٢ × (س د)٢) / (ا ب)٢

∴ (س ا)٢ + (ا ی)٢ = ((ا ی)٢ × (س د)٢) / (ا ب)٢

لیکن (س ا)٢ = (ا ب)٢ ∴ ا ی٢ = ا ب٤ / ((س و)٢ − (ا ب)٢)

پہر جم د ی ا = ی ا / ی و

اور جم ب ی س = ((ی ب)٢ + (ی س)٢ − (ب س)٢) / (٢ ی ب × ی س)

= ((ی ا)٢ + (ا ب)٢ + (ی ا)٢ + (ا س)٢ − {(ا ب)٢ + (ا س)٢}) / (٢ ی ب × ی س)

= (ی ا)٢ / (ی ب × ی س)

لیکن فرض سے جم ب ی ا = جم د ی س

یعنے ی ا / ی ب = ی س / ی و ∴ ی ا × ی و = ی ب × ی س

∴ ی ا / ی و = (ی ا)٢ / (ی ب × ی س)

سٹ فرض کرو کہ علم کی چوٹی ا ہے اور ب مینار کی چوٹی ہے اور س مینار کے جڑہ اور ی آنکھ اور ی سے ی د اس سطح افقی پر جو س مین سے گذرتی ہے عمود کھینچو

تو زاویہ ب ی س = ب ی ا

اب جیب ب ی س / جیب ی ب س = ب س / ی س

$$\text{اور} \; \frac{\text{جب ب ی ا}}{\text{جب ی ب ا}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ی}}$$

$$\therefore \frac{\text{ب س}}{\text{ی س}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ی}}$$

یہہ اقلیدس م ۳ ش ۶ کے مطابق ہے +

$$\text{فرض کرو کہ س و = د تو ی س} = \sqrt{\text{ح}^2 + \text{د}^2}$$

$$\text{اور ی ا} = \sqrt{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 + \text{د}^2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{\text{ح}^2 + \text{د}^2}}{\sqrt{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 + \text{د}^2}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

$$\therefore \{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 + \text{د}^2\}\,\text{ب}^2 = (\text{ح}^2 + \text{د}^2)\,\text{ا}^2$$

$$\therefore \text{د}^2 = \frac{\text{ب}^2(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 - \text{ح}^2\text{ا}^2}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$$

$$\therefore (\text{ی س})^2 = \frac{\text{ح}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) + \text{ب}^2(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 - \text{ح}^2\text{ا}^2}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$$

$$= \frac{\text{ب}^2\{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 - \text{ح}^2\}}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$$

$$= \frac{\text{ب}^2(\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} - ۲\text{ح})}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$$

$$= \frac{\text{بَ}^{2}(\text{اَ} + \text{بَ} - ٢\,\text{ح}^{2})}{\text{اَ} - \text{بَ}}$$

$$\therefore \text{ی س} = \text{بَ}\left\{\frac{\text{اَ} + \text{بَ} - ٢\,\text{ح}}{\text{اَ} - \text{بَ}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

س ٩ فرض کرو کہ پ ظاہر کرتا ہے مینار کی چوٹی کو اور پ سے زمین

پر پ ق عمود کھینچو تو پ ق = ح

فرض کرو کہ د ظاہر کرتا ہے مینار کے قاعدہ سے ق کے

فاصلہ کو اور د + اَ ق کا مشاہدہ کے ایک مقام سے

فاصلہ ہے اور اسیطرح د + ب ق کا مشاہدہ کے دوسرے

مقام سے فاصلہ ہے اسطرح

$$\text{مم}\,\theta = \frac{\text{د}}{\text{ح}}$$

$$\text{مم}\,\text{اِ} = \frac{\text{د} + \text{اَ}}{\text{ح}}$$

$$\text{مم}\,\text{بِ} = \frac{\text{د} + \text{بَ}}{\text{ح}} \quad \therefore \text{ح}\ \text{مم}\,\text{اِ} = \text{د} + \text{اَ}$$

$$\text{ح}\ \text{مم}\,\text{بِ} = \text{د} + \text{بَ}$$

$$\therefore \text{ح} = \frac{\text{بَ} - \text{اَ}}{\text{مم}\,\text{بِ} - \text{مم}\,\text{اِ}}$$

$$\text{اور}\ \text{د} = \text{ح}\ \text{مم}\,\text{اِ} - \text{اَ} = \frac{(\text{بَ} - \text{اَ})\ \text{مم}\,\text{اِ}}{\text{مم}\,\text{بِ} - \text{مم}\,\text{اِ}} - \text{اَ}$$

$$= \frac{\text{بَ}\ \text{مم}\,\text{اِ} - \text{اَ}\ \text{مم}\,\text{بِ}}{\text{مم}\,\text{بِ} - \text{مم}\,\text{اِ}}$$

اِسیطرح مس ہ = ج/د = (بَ - اَ) / (بَ مم اِ - اَ مم ب)

سن ۱۰ فرض کرو کہ دَ بلندی مطلوب کو ظاہر کرتا ہے اور دَ
زاویہ ہے جوکہ مینار بناتا ہے

د = بَ مس ہ

اور د + اَ = بَ مس {ہ + ج}

∴ د + اَ = بَ (مس ہ + مس ج) / (۱ - مس ہ مس ج) =

= (د + بَ مس ج) / (۱ - (د مس ج)/بَ)

اس طرح هم مساوات چوتھے درجہ کے دَ کے معلوم

کرنیکے واسطے رکھتے ہین +

سن ۱۱ فرض کرو کہ د ظاہر کرتا ہے دریا کی چوڑائی کو فٹونمین فرض
کرو کہ اِ ظاہر کرتا ہے اس زاویہ کو جو ستون سے نبتا ہے
اور ب وہ زاویہ ہے جوکہ ستون اور پتھر کی تصویر سے
نبتاہے +

اسیطرح مس اِ = ۲۰۰/د

اور مس بِ = ۲۳۰/د ∴ مس (بِ - اِ) =

= (۲۳۰/د − ۲۰۰/د) / (۱ + ۲۳۰×۲۰۰/۲د)

= ۳۰د / (۴۶۰۰۰ + ۲د) لیکن قیاس سے مس (ب − اِ) =

۹/د ∴ ۹/د = ۳۰د / (۴۶۰۰۰ + ۲د)

∴ ۲د = ۴۶۰۰۰ + ۲د ۵

∴ ۲د = ۱۱۵۰۰ ∴ د = ۱۰ √۱۱۵

س ۱۲ گھر کا وہ حصہ جو افقی مستقیم خط کے اوپر واقع ہے ایک زاویہ ۶۰° کا بناتا ہے اور اس طرح گھر کی چوٹی کی بلندی دریچہ سے اوپر ۳۰ مس ۶۰° فٹ ہے اور گھر کا وہ حصہ جو کہ افقی مستقیم خط کے نیچے واقع ہے ایک زاویہ ۴۵° کا بناتا ہے اور اس طرح گھر کی بنیاد کا عمق دریچہ سے ۳۰ مس ۴۵° فٹ ہے اسلئے فاصلہ گھر کی بنیاد کا چوٹی سے فٹوں میں =

۳۰ (مس ۶۰° + ۴۵°) = ۳۰ (۱/۳√ + ۱)

= ۳۰ + ۳۰ ۳√ = ۳۰ ۳√/۳ ...

س ۱۳ ہر ایک آتشدان کی بلندی کو ‌ق فٹ فرض کرو اور انکی درمیانی

فاصلہ کو ی فرض کرو۔ مشاہدہ کے اول مقام کا قریب کے
آتشدان سے فاصلہ د مس ۵° ہے اور اس لئے مشاہدہ کے
دوسرے مقام کا فاصلہ √(۸۰)^۲ + د^۲ مم^۲ ۵° ہے
اسطرح √(۸۰)^۲ + د^۲ مم^۲ ۵° = مس ۵° = ۴ :. د^۲ = (۸۰)^۲ +
(د^۲ مم^۲ ۵° = ۸۰^۲ + د^۲/۳ :. ۲ د^۲ = ۳ × (۸۰)^۲
:. د^۲ = ۶ (۴۰)^۲ :.
:. د = ۴۰ √۶ + مشاہدہ کے اول مقام کا دور کے
آتشدان سے ی − د مم ۵° ہے اور اسلئے مشاہدہ کے
دوسرے مقام کا فاصلہ √(۸۰)^۲ + (ی − د مم ۵°)^۲ اسطرح
√(۸۰)^۲ + (ی − د مم ۵°)^۲ = مس ۵۰° = √۳ :. ۳ د^۲ = (۸۰)^۲
+ (ی − د مم ۵°)^۲ :. ۱۴۴ (۴۰)^۲ = (ی − د مم ۵°)^۲ :. ی = د مم ۵°
+ ۴۰ √۱۴۴ = ۴۰ (√۲ + √۱۴۴) +

س ۱۴ فرض کرو کہ پ چیز ہے اور پ ق کھمبا ہے اس سطح افقی پر
عمود کھنچا ہوا فرض کرو جو کہ آ اور ب اور س کو مستقیم ہے
فرض کرو پ ق = د اور س ق = ی
فرض کرو زاویہ پ آ ق کو ہ
تو پ ب ق = ۲ ہ اور پ س ق = ۳ ہ

$$\text{اسیطرح مس ه} = \frac{\text{و}}{\text{ی} + \text{اَ} + \text{بَ}}$$

$$\text{اور مس ٢ ه} = \frac{\text{و}}{\text{ی} + \text{بَ}} \quad \text{اور مس ٣ ه} = \frac{\text{و}}{\text{ی}}$$

$$\therefore \text{ی} + \text{اَ} + \text{بَ} = \text{و مم ه}$$

$$\text{اور ی} + \text{بَ} = \text{و مم ٢ ه}$$

$$\text{اور ی} = \text{و مم ٣ ه}$$

$$\therefore \text{اَ} = \text{و} \left(\text{مم ه} - \text{مم ٢ ه} \right)$$

$$\text{اور بَ} = \text{و} \left(\text{مم ٢ ه} - \text{مم ٣ ه} \right)$$

$$\therefore \text{اَ} = \text{و} \left(\frac{\text{جم ه}}{\text{جب ه}} - \frac{\text{جم ٢ ه}}{\text{جب ٢ ه}} \right)$$

$$= \frac{\text{و جب} (\text{٢ه} - \text{ه})}{\text{جب ه جب ٢ ه}} = \frac{\text{و}}{\text{جب ٢ ه}}$$

$$\text{اور بَ} = \text{و} \left(\frac{\text{جم ٢ ه}}{\text{جب ٢ ه}} - \frac{\text{جم ٣ ه}}{\text{جب ٣ ه}} \right) =$$

$$= \frac{\text{و جب} (\text{٣ه} - \text{٢ه})}{\text{جب ٢ ه جب ٣ ه}} =$$

$$= \frac{\text{و جب ه}}{\text{جب ٢ ه جب ٣ ه}} = \frac{\text{و}}{\text{جب ٢ ه} (\text{٣} - \text{٤ جب}^{\text{٢}}\text{ ه})}$$

$$\text{اسیطرح جب ٢ ه} = \frac{\text{و}}{\text{اَ}}$$

$$\text{اور ٣} - \text{٤ جب}^{\text{٢}}\text{ ه} = \frac{\text{و}}{\text{بَ جب ٢ ه}} = \frac{\text{اَ}}{\text{بَ}}$$

∴ ۳ − ۲ (۱ − جم ۲ه) = ا/ب

∴ جم ۲ه = ۱/۲ (ا/ب − ۱)

اِسلیے و²/ر² + ۱/۴ (ا/ب − ۱)² = ۱

اِسلیے و²/ر² = ۱ − ۱/۴ (ا/ب − ۱)² = (۴ب² − (ا − ب)²)/۴ب² =

= (۳ب² + ۲اب − ا²)/۴ب²

= (۳ب − ا)(ا + ب)/۴ب²

∴ و = ر/۲ب √((ا + ب)(۳ب − ا))

اگر مس ه = ۱/۳ تب جب ۲ه = ۲ مس ه/(۱ + مس² ه)

= (۲/۳)/(۱/۹ + ۱) = ۳/۵ اور جب ۲ه = و/ر

اِسلیے ۳/۵ = √((ا + ب)(۳ب − ا))/۲ب ∴

۳۶ب² = ۲۵ (ا + ب)(۳ب − ا) =

۲۵ (۳ب² + ۲اب − ا²)

∴ ۳۹ب² + ۵۰اب − ۲۵ا² = ۰

∴ (۱۳ب − ۵ا)(۳ب + ۵ا) = ۰

∴ ۱۲ اب − ۵ اَ = ۰

س ۱۵ فرض کرو کہ مینار کی بلندی د گز ہے تو نقطہ ۰ سے مینار کے پانون تک د مم ۱۵° ہے اس لیئے کہ مینار ہمیشہ اسی زاویہ پیدا کرتا ہے مشاہدہ کنندہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ مینار ہمیشہ ایک ہی زاویہ بناتا ہے اسلیئے ضرور ایک ایسے دایرہ کی قوس بنیگی جسکا مرکز مینار کے پاؤن میں ہے اور جبکہ مینار کی سمت شمال سے شمال مشرق کی طرف بدلتی ہے تو دایرہ محیط کے ⅛ حصہ کو ضرور طے کریگا ؞

اسلیئے $\frac{۲\ ط\ د\ مم\ ۱۵°}{۸} = ۱۰۰$

∴ $د = \frac{۴۰۰\ مس\ ۱۵°}{ط}$ ۹

س ۱۶ فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے چیز کو جو کہ سڑک سے دور ہے اور ب ظاہر کرتا ہے اُس چیز کو جو کہ سڑک کے پاس ہے ؞ اور س وہ نقطہ ہے جہان کہ ا ب بڑا زاویہ بناتا ہے اور د دیکھنے کی جگہ کا دوسرا مقام ہے یہہ جانا گیا ہے کہ نقطہ س ایسا ہے کہ نقطون ا اور ب اور س کے گرد جو دایرہ کھینچا جاوے تو س د کو لمس کریگا اقلیدس پر ٹوڈہنٹر صاحب کے نوٹون کو صفحہ ۳۰۰ مین دیکھو ؞

∴ زاویہ ب س د برابر ہے زاویہ ب ا س اور اس کو ہ سے تعبیر کرو

ہ سے ظاہر ہوتا ہے تو زاویہ ا ب س = ہ + ب

اور نیز = π − ہ − اِ

∴ ۲ہ = π − اِ − بِ

اب ب س / س د = جب ب / جب (ہ + بِ)

∴ ب س = سَ جب ب / جب (ہ + بِ)

اور ا ب / ب س = جب ا / جب ہ

∴ ا ب = سَ جب اِ جب ب / جب ہ + جب (ہ + بِ) =

۲ سَ جب اِ جب ب / جم بِ − جم (۲ہ + بِ)

= ۲ سَ جب اِ جب ب / جم بِ − جم (π − اِ)

= ۲ سَ جب اِ جب ب / جم بِ + جم اِ

سٹ ۱ — فرض کرو کہ ا قلعہ کو ظاہر کرتا ہے اور ب جہاز کے پہلے حالت کو اور س دوسری حالت کو بڑھاؤ ب س کو نقطہ س میں سے گذرتا ہوا کسی نقطہ یَ تک تب زاویہ ا ب س = ½ ۲۲°

اور زاویہ ا س ی = ½ ۹°،

∴ زاویہ ب ا س = ۵ ۴°

$$\frac{\text{اب}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب اس ب}}{\text{جب ب اس}} = \frac{\text{جب}\,(۱۸۰^\circ - ۶۷\tfrac{۱}{۲}^\circ)}{\text{جب}\,۴۵^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۲}}{\sqrt{۲}} \div \frac{۱}{\sqrt{۲}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{۲}+۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}}$$

$$\therefore \text{اب} = ۴\sqrt{\frac{\sqrt{۲}+۲}{۲}} = \sqrt{۸\sqrt{۲}+۱۶}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{اس}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب اب س}}{\text{جب ب اس}} = \frac{\text{جب}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ}{\text{جب}\,۴۵^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} \div \frac{۱}{\sqrt{۲}} =$$

$$\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\therefore \text{اس} = ۴\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۱۶-۸\sqrt{۲}}$$

دیکھو مثال ۷ و ۱۸

س ۱۸ فرض کرو کہ جہاز کی پہلی حالت ب ہے اور اَ قریبی روشنی گھر اور ب دور کا روشنی گھر اور ق دوسری حالت جہاز کی ٭

تو زاویہ ب ق پ = ۴۵°

اور اَ ق پ = ۲۲½°

∴ زاویہ ق اپ = ½ ۹۷°

ب ق / ب ا = جب ب ا ق / جب ب ق ا

= جب(۱۸۰° − ½ ۹۷°) / جب ½ ۴۲° = جب ½ ۹۷° / جب ½ ۴۲° =

جم ½ ۴۲ / جب ½ ۴۲° = مم ½ ۲۲° = ما۲ + ۱

بموجب مثال ۱۸۰۷

∴ ب ق = ۸{ما۲ + ۱}

اور پ ق = ب ق جب ۴۵° =

۸(ما۲ + ۱) / ما۲ = ۸ + ۴ ما۲

س ۱۹ فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے چوٹی روشن گھر کی اور پ مستول کی چوٹی جو کہ پہلے مشاہدہ مین معلوم ہوتے تھے اور س مرکز زمین کا ایک خط کھینچو پ سے ا تک اور زمین کو ب پر مس کرے اور فرض کرو کہ ر زمین کا نصف قطر فٹون مین ہے تو پ ب =

ما(پ س)² − (ب س)²

= ما(ر + ۹۶)² − ر² = ما ۲ × ر × ۹۶ + (۹۶)²

= √۲ر × ۹۴ بہت قریباً کیونکہ ر کا ۹۴ ۲ کے ساتھ بہت سے مقابلہ کیا گیا ہے ✣

اور ٹھیک اسی طریقہ مین اگر ق جہاز کے تختہ کو دوسرے مشاہدہ مین ظاہر کرے تو

ق ب = √۲ر × ۱۶ اب چونکہ پ کس ب

ایک بہت چھوٹا زاویہ ہے تو ہم اس سبب سے کہ مس ہ بہت ہی قریب ہ کے برابر ہے جبکہ ہ بہت چھوٹا ہے خط مستقیم پ ب کو اس قوس کے برابر خیال کرتے ہین جو کہ پہلے مشاہدہ مین ب سے جہاز کے فاصلہ کو اندازہ کرتی ہے اور ایسا ہی ہم خیال کرتے ہین ق ب کو وس قوس کے برابر جو کہ دوسری مشاہدہ مین ب سے جہاز کے فاصلہ کو اندازہ کرتی ہے ✣

اسیطرح دونون مشاہدون کے درمیان جہاز اوپر چل گیا ہے ✣

√۲ر × ۹۴ − √۲ر × ۱۶

یعنی ۴ √۲ر یعنی ۴/۵ سے گھنٹہ مین وہ چل چکا ہے

۴ √۵۲۸۰ × ۸۰۰۰ فیٹ

∴ بنسبت ۸ √۵۲۸۰ × ۸۰۰۰ فیٹ ایک گھنٹہ کے واسطے ✣

یعنے ۸ | ۵۲۸۰ × ۸۰۰۰ / ۵۲۸۰ میل فی گھنٹہ

یعنے ۸ | ۸۰۰ / ۵۲۸ میل فی گھنٹہ

یعنے ۸ | ۵۰ / ۳۳ میل فی گھنٹہ

یہہ بہت قریباً ۸ | ۳ / ۲ میل فی گھنٹہ ہے

سن ٢٠ فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے پہاڑ کی چوٹی کو اور ب قاعدہ کو اور ب س راستہ کے پہلے حصہ کو اور س ا رستہ کے دوسرے حصہ کو

اسے ا ی ایک عمود افقی سطح پر کھینچو جو کہ ب کو شامل ہے اور مفصلہ ذیل زاوئے ہین +

ب ا ی = π/۲ − سِ

س ب ی = اِ

س ا ی = π/۲ − بِ

∴ ب ا س = بِ − س

ا ب س = سِ − اِ

ا س ب = π + اِ − بِ

ا ب = ا ی / جب سِ = ن / جب سِ

$$\frac{\text{ب س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب ب ا س}}{\text{جب ا س ب}} = \frac{\text{جب (ب - س)}}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$\frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب ا ب س}}{\text{جب ا س ب}} = \frac{\text{جب (س - ا)}}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$\therefore \frac{\text{ب س + ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب (ب - س) + جب (س - ا)}}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$= \frac{\text{۲ جب } \frac{\text{ب - ا}}{\text{۲}} \text{ جم } (\frac{\text{ب + ا}}{\text{۲}} - \text{س})}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$= \frac{\text{جم } (\frac{\text{ا + ب}}{\text{۲}} - \text{س})}{\text{جم } (\text{ب - ا})}$$

$$\therefore \text{ب س + ا س} = \frac{\text{ن}}{\text{جب ا س}} \times \frac{\text{جم } (\frac{\text{ا + ب}}{\text{۲}} - \text{س})}{\text{جم } \frac{\text{ب - ا}}{\text{۲}}}$$

س ۲۱ فرض کرو کہ د چیز کے پاؤں کو ظاہر کرتا ہے اور ا د ب کو مشاہدہ کے تین مقاموں کو ظاہر کرتے ہیں اور د ظاہر کرتا ہے چیز کی بلندی کو۔ تو د آ

$= \text{د مم ا}$ اور $\text{د ب} = \text{د مم ب}$

اور $\text{د س} = \text{د مم س}$

ہم مثلث ا د س سے رکھتے ہیں $\text{د}^{۲}\text{ مم}^{۲}\text{ ا} = \text{د}^{۲}\text{ مم}^{۲}\text{ س}$

+ اِ۲ - ۲ اِ دحم سِ جم اِ س د

اور مثلث ب و س سے رہ کہتے ہین د۲ حم ب =

د۲ حم۲ سِ + بَ۲ - ۲ بَ دحم سِ جم ب س و

پہلی مساوات کو بَ سے ضرب دو اور دوسرے کو اُ سے

اور جمع کرو

اسیطرح د۲ (بَ حم۲ اِ + اَ حم۲ بِ) =

= اَبَ (اَ + بَ) + د۲ (اَ + بَ) حم۲ س

اَبَ (اَ + ب) جب۲ اِ جب۲ بِ جب۲ سِ
د۲ = ―――――――――――――――――――――――――
اَ (اَ جم۲ بِ جب۲ سِ - جم۲ س جب۲ بِ) جب۲ اَ + بَ (جم۲ اِ جب۲ س جم۲ س جب۲ اَ)

اَبَ (اَ + بَ) جب۲ اِ جب۲ بِ جب۲ سِ ÷

اَ (جب۲ سِ - جب۲ بِ) جب۲ اِ + بَ (جب۲ س جب۲ اِ) جب۲ ب

س ۲۲ فرض کرو کہ نیچے پہاڑی کے چوٹی پ ہے اور اونچی پہاڑی کے چوٹی ق اور فرض کرو کہ اَ مشاہدہ کی پہلی جگہہ کو ظاہر کرتا ہے اور ب دوسری کو اور س تیسری کو اور پ اور ق سے پ م اور ق ن کہینچو جو کہ جداگانہ اس افقی سطح پر جو کہ اَ اور بَ اور سَ کو شامل ہے عمود ہون +

فرض کرو کہ پ م = ح اور ق ن = حَ تو اَ م = ح حم اِ اور

ا م = ا ب + ب س + س م =

س + ا + ح مم ب

∴ ح مم اِ = س + ا + ح مم ب

∴ ح (مم اِ − مم بِ)

= س + ا

$$∴ ح = \frac{(س + ا) \text{ جب اِ جب ب}}{\text{جب} (بِ - اِ)}$$

اور متشابہ مثلثون کی مدد سے $\frac{ح}{ح} = \frac{ق ن}{پ م} = \frac{ب ن}{ب م}$

$$= \frac{ا ن - ا ب}{ا م - ا ب} = \frac{ح مم اِ - س}{ح مم ا - س}$$

اسطرح چونکہ ہمکو ح معلوم ہوگیا ہے ہم حَ کو معلوم کر سکتے ہین ٭

س ۲۴ فرض کرو کہ ح فیٹ مینار کے ارتفاع کو ظاہر کرتا ہے اور اَ سورج کے سایہ کو دوپہر کے وقت اور فاصلہ مینار کے تہ اور خندق کے کنارہ کے درمیان ح مم ۶۰° ہے اس لیے مینار کے تہ اور سایہ کے نیچے کے درمیان

فاصلہ ح مم ۹۰° + ۵ ۴ دوپہر کے وقت ہے

ح مم ۹۰° + ۱۲۰ اس وقت ہے جبکہ سورج ٹھیک مغرب کی طرف ہی سایہ کی سمتین زاویہ قایمہ پیدا کرتے ہین اسلیے

ح مم (۹۰° + ۴۵)^۲ + (ح مم ۹۰° + ۱۲۰)^۲

= (۳۷۵)^۲

∴ ح^۲/۳ + ح/۳ ۲ا × ۱۶۵ + (۴۵)^۲ +

(۱۲۰)^۲ = (۳۷۵)^۲

∴ ح^۲/۳ + ۱۶۵ ح/۳ ۲ا = ۱۲۴۲۰۰

اس مساوات درجہ دوم کو عام طرح حل کرنے سے ح

= ۸۰ ۱ا۳

یا - ۵۴ ۳ ا۳ ان دو قیمتون مین سے صرف مثبت قیمت کارآمد ہے ∴ ح مم ا - ح مم ۹۰° = ۴۵

∴ مم ا = مم ۹۰° + ۴۵/ح = ۱/۳ ا۳ + ۴۵/۱۸۰ ا۳ = ۱/۳ ا۳ + ۱/۴ ا۳

= ۵/۴ ا۳

∴ مس ا = ۴ ا۳/۵

س ۲۴ فرض کرو کہ پ ظاہر کرتا ہے مینار کی چوٹی کو توت زاویہ ہے درمیان پ ا اور س ا کے جو کہ ز مین سے گذرتا ہے

اسیطرح زاویہ س پ ا = ت - ا اور زاویہ

د پ س = ا - ب

تب د س / س پ = جب د پ س / جب س د پ = جب (ا - ب) / جب ب

اور س ا / س پ = جب س پ ا / جب س ا پ = جب (پ - ا) / جب (π - پ) =

جب (پ - ا) / جب پ

∴ جب (ا - ب) / جب ب = جب (پ - ا) / جب پ

∴ جب ا مم ب - مم ا = جم ا - جب ا مم پ

∴ مم پ = ۲ مم ا - مم ب

اب فرض کرو کہ ا اور ب اور پ مقابل ہین ان مشاہدون کے

مقاموں کے جو کہ ایک اور خط مستقیم ا س وین ہین

تو مم پ' = ۲ مم ا' - مم ب'

لیکن بموجب فرض کرنے ۲ مس ب = مس ا'

∴ مم پ' = ۰

∴ پ' = π/۲

اسطرح سے اُس وَ زاویہ قائمہ بناتا ہے ا پ کے ساتھ

∴ ا س وَ افقی خط مستقیم ہے

و سے و م عمود ا وَ پہ کھینچو۔

اور مَ سے م ن اس افقی سطح پر جوکہ د کو شامل ہے عمود

کھینچو اور پ ا کو ا مین سے گذرتی ہوے یہانتک

بڑہاؤ کہ اسی سطح سے نقطہ ق پر ملے

تو جب ہ = $\frac{\text{م ن}}{\text{م و}}$ جب سِ = $\frac{\text{و م}}{\text{و ا}}$ اور

جم پ = $\frac{\text{ق}}{\text{ا و}}$ = $\frac{\text{م ن}}{\text{ا و}}$

∴ جم پ = جب ہ جب سِ

جب ب = $\frac{\text{پ}}{\text{ا}}$ جب ا = س ۲۵

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ جب ا = $\sqrt{3}$ جب ا

اسیطرح اگر ا = $\frac{\pi}{6}$ تو ہم رکہتے ہین جب ب = $\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$

∴ پ = $\frac{\pi}{3}$ یا $\frac{2\pi}{3}$

تیسرے فرض کرو کہ ا = $\frac{\pi}{6} \pm$ ح جہانکہ ح

۶ کے محیط کا اندازہ ہے

تو جب ب = $\sqrt{3}$ جب ($\frac{\pi}{6} \pm$ ح)

= $\sqrt{3}$ { جب $\frac{\pi}{6} \pm$ ح جم $\frac{\pi}{6}$ } نہایت قریباً

فرض کرو کہ ب = $\frac{\pi}{3}$ ± ک

اور قریباً جب $\frac{\pi}{3}$ ± ک جم $\frac{\pi}{3}$ =

ماس $\left\{ \text{جب } \frac{\pi}{6} \pm \text{ح جم } \frac{\pi}{6} \right\}$

∴ ± ک جم $\frac{\pi}{3}$ = ± ح ماس جم $\frac{\pi}{6}$

∴ ک = ح ماس . مم $\frac{\pi}{2}$ = ۳ ح

اس طریقہ سے اگر ب = $\frac{2\pi}{3}$ ± ک

تو ہم معلوم کرتے ہین کہ ک = -۳ ح - اس طرح قریباً

غلطی ب مین ۶ سیکنڈ ہے

س ۳۴ فرض کرو کہ ا اور ب دو چیزین دریا کے مقابل کے کنارہ

پر واقع ہین اور فرض کرو کہ پ اور ق اس کنارہ پر دو

نشان ہین جب ایسا ہے تو پ ق = ا پ اور فرض کرو

کہ پ ا کے مقابل ہے اور ق ب کے اس لئے ا پ ب ق

کی متوازی اور مساوی ہے اور فرض کرو کہ ا ق اور ب

پ باہم نقطہ س پر تقاطع کرتے ہین تو ا = زاویہ ا پ ب

اور ب = زاویہ ا ق ب = زاویہ پ ا ق

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{پ ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (ا + ب)}}$

$\frac{\text{ا س}}{\text{ا ق}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب (ا + ب)}}$

لیکن (پ ق)^2 = (پ س)^2 + (ق س)^2 =

− ۲ پ س · ق س · جم پ س ق اور ق س = ا س

∴ س^2 = (پ ا)^2 $\frac{\text{جب}^2\text{ب} + \text{جب}^2\text{ا} - ۲\text{جب ا جب ب جم (ا + ب)}}{\text{جب}^2\text{(ا + ب)}}$

فرض کرو کہ و ظاہر کرتا ہے چوڑائی دریا کی اس لئے مثلث

ا پ ب کا رقبہ

= $\frac{1}{2}$ وس اور یہہ رقبہ = $\frac{1}{2}$ پ ا ×

پ ب جب ا پ ب = پ ا · پ س جب ا

= $\frac{\text{پ ا}^2\text{جب ا جب ب}}{\text{جب (ا + ب)}}$ = $\frac{\text{س}^2\text{جب ا جب ب جب (ا + ب)}}{\text{جب}^2\text{ب} + \text{جب}^2\text{ا} - ۲\text{جب ا جب ب جم (ا + ب)}}$

فرض کرو کہ ا ب ظاہر کرتا ہے قلعہ کے ایک ضلع کو اور س ایک مقام ٹھیک ا کے جنوب کی جگہہ ہے اور د دوسرا مقام · س ۲۷

∴ س د = ا

اور زاویہ ا س د = ۹۰°

اور ا اور ب اور س اور د دایرہ کے محیط پر واقع ہونگے

فرض کرو کہ ی تیسری جگہہ ہے

پس ی س د پر واقع ہے جو کہ

د مین سے بڑہایا گیا ہے اور د ی = ب

اور زاویہ ب ہی د ایک قائمہ ہے

فرض کرو کہ پ زاویہ ہے درمیان ا ب جو کہ ومین سے گذرتا ہے

اور س ہی کے جو کہ ہی مین سے گذرتا ہے تب ا + ب

= اب جم ب

∴ اب = (ا + ب) قع پ

اور ب ی = ی س مس ب س ی

اور = ی د مس ب د ی

∴ (ا + ب) مس (۹۰° − ا) = ب مس ب ا س

= ب مس (۹۰° − ب) اقلیدس ۳ ش ۲۲

ش ۲۸ ا سے ا م اس افقی سطح پر عمود ڈالو جو کہ س ٹ ک کو شامل ہے

اور ا ن سیدہی س ٹ ک پر کہینچو

∴ جب ا = ام / اب

اور جب ب = ان / اب

ایسا ہی ۤ ا سے ۤ ا ۤ م خط عمود افقی سطح پہ کہینچو اور ۤ ا ۤ ن سیدہی س ٹ ک پر

تو جب ۤ ا = ۤ ا ۤ م / ۤ ا ۤ ب

اور جب بَ = اَ نَ / اَ بَ

اِسیطرح یہہ ظاہر کرتے ہین کہ اَ م / اَ ب × اَ نَ / اَ بَ = اَ مَ / اَ بَ ・ اَ ن / اَ ب

یا کہ ا م ・ اَ نَ = اَ مَ × ا ن یا یہہ کہ اَ مَ / اَ نَ = ا م / ا ن

اب اگر اَ ٹہیک اَ سے سٹرک کے کسی نقطہ پر پوشیدہ ہے اَ ا خط مستقیم اگر ٹہکرا مین سے گذرے تو سٹرک کو تقاطع کریگا اور تب اَ ا اور سٹرک سطح پر واقع ہونگے افقی سطح کے ساتھہ اس سطح کے میلانکا جب ظاہر کیا گیا ہے ا م / ا ن سے اور نیز اَ مَ / اَ نَ سے بس یہہ برابر ہین ✣

س ٢٩ اس جگہہ دو حالتین ہین - فرض کرو کہ ا پ ق اور ب پ ر جداگانہ ا پ اور ب پ کی ایک ہی اطراف مین ہین تو زاویہ ق پ ر = زاویہ ا پ ب = د ✣

فرض کرو کہ زاویہ ا پ ق اور ب پ ر جداگانہ ا پ اور ب پ کے ایک ہی طرف ہین تو زاویہ ر ب ق = π - د -

دونون حالتون مین ا ب = ر ق کیونکہ اس دایرہ کا نصف قطر جو کہ پانچ نقطون اَ اور ب اور پ ق اور ر کے گرد جاتا ہے = اَ ب / جب اَ ب پ

اور نیز = ر ق / جب ر پ ق

پہلے حالت مین اب = √(ا^۲ + ب^۲ − ۲ اب جم ا)

دوسری حالت مین اب = √(ا^۲ + ب^۲ + ۲ اب جم ا)

س ۳ فرض کرو کہ دونو خط وس زاویہ اس ب کے اندر گذرتے ہین اور فرض کرو کہ اس = ا اور اس و = پ تو ہم مثلثون اس و اور ب س و سے ہم پاتے ہین

وس = ا جب (پ + ا) / جب ا اور وس = ا جم (پ − ب) / جب ب

∴ وس جب ا = ا (جب پ جم ا + جم پ جب ا)

وس جب ب = ا (جم پ جم ب + جب پ جب ب)

∴ ا جب ب = وس جب ا (جم ب − جب ب) / جم (ا + س)

مجذور کرو اور جمع کرو اس طرح سے

ا^۲ جم^۲ (ا + ب) = وس^۲ {جب^۲ ا (جم ب − جب ب) + جب^۲ ب (جم ا − جب ا)}

= وس^۲ {جب^۲ ا + جب^۲ ب − ۲ جب ا جب ب جب (ا + ب)}

اس طرح سے وس^۲ = ا^۲ جم^۲ (ا + ب) / (جب^۲ ا + جب^۲ ب − ۲ جب ا جب ب جب (ا + ب))

ایک ایسی ہی مثال وس^۲ کے واسطے ا اور ب کے اصطلاحون

مین پاے جاوینگی تب وسَ۲ = وس۲ + د۲ - اس سے
دَ معلوم ہوجاتا ہے اور تب دَب = دَا۲ ایسا ہے
سوال خطوط وس اور وسَ کے کسی اور حالت کے واسطے
حل کیا جائیگا ✤

س ۲۱ فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے سورج کا ارتفاع تو مس ا = $\frac{۱۵۰}{۷۵}$ = ۲

∴ ل مس ا = ۱۰ + لوگ ۲

∴ ۱۰٫۳۰۱۰۳۰۰   ۱۰٫۳۰۱۳۱۵۳   ۱۰٫۳۰۱۰۳۰۰

۱۰٫۳۰۰۹۹۹۴   ۱۰٫۳۰۰۹۹۹۴

٫۰۰۰۳۱۵۹   ٫۰۰۰۰۳۰۶

٫۰۰۰۳۱۵۹ : ٫۰۰۰۰۳۰۶ :: ″۶۰ : ″و

∴ و = ۶٫۰ ∴ ا = ۶۳° ۲۶′ ۶″

س ۲۲ دفعہ ۱۹۳ کے شکل لو

یہان پ ب س = ۵°۵

اور پ ا س = ۸°۴

اور اب = ۳۰ فیٹ

$\frac{\text{ب ت}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{جب پ اب}}{\text{جب اپ ب}} = \frac{\text{جب ۸°۴}}{\text{جب ۳°}}$

∴ پ ب = ۳۰ جب ۸°۴ جب ۳۵° / جب ۷°

ب س = ب پ جم پ ب س =

ب پ جم ۵°۵ = ب پ جب ۵°۳

= ۳۰ جب ۸°۴ جب ۳۵ / جب ۷°

لوگ ب س = لوگ ۳۰ + ل جب ۸°۴ – ۱۰ +

ل جب ۳۵ – ۱۰ – (ل جب ۷° – ۱۰)

= ۱٫۴۷۷۱۲ + ۹٫۸۷۱۰۷ + ۹٫۷۵۸۵۹

= ۹٫۰۸۵۸۹ – ۱۰ = ۲٫۰۲۰۸۹

∴ ب س = ۱۰۳٫۹۳

س۳۳ ا ظاہر کرتا ہے میلان کو تو جب ا = ۱۰۰/۱۹۶ = ۱۰۰/۴۹×۴

∴ ل جب ا = ۱۰ + لوگ ۱۰۰ – لوگ (۴ × ۴۹)

= ۱۲ – ۲ لوگ ۲ – ۲ لوگ ۷ = ۹٫۷۰۷۷۴

۹٫۷۰۷۷۴	۹٫۷۵۷۸۲
۹٫۷۰۷۶۱	۹٫۷۵۷۶۱
٫۰۰۰۱۳	٫۰۰۰۲۱

٫۰۰۰۲۱ : ٫۰۰۰۱۳ :: ۶۰″ : ق

∴ ق = ۳۷

∴ ا = ۳۰° ۴۵' ۳۰"

س ۴۳ فرض کرو کہ ا ٹیلو نکا نقطہ تقاطع ہے اور ب چھوٹے پر مشاہدہ کا مقام ہے اور پ چیز کی چوٹی اور س تہ پ ب کو ب مین سے یہانتک بڑہاؤ کہ اس افقی خط سے جو کہ ا کو شامل ہے نقطہ د پر ملے اور د ا کو ا مین سے کسی نقطہ ی تک بڑہاؤ تب ا ب = ۴۶ فیٹ اور مفصلہ ذیل معلوم زاویہ ہین ٭

س ا ی = ۹۰°

ب ا د = ۴۰° ب د ا = ۰، ب پ س = ۹۰° - ۶۰° = ۳۰°

∴ ب ا س = ۵۰° اور ب س ا = ۲۰°

پ ب س = ۶۰°

$$\frac{\text{ب س}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{جب ب ا س}}{\text{جب ب س ا}} = \frac{\text{جب ۵۰°}}{\text{جب ۲۰°}}$$

$$\frac{\text{پ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب ب پ س}}{\text{جب ب پ س}} = \frac{\text{جب ۶۰°}}{\text{جب ۳۰°}}$$

$$\therefore \frac{\text{پ س}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{جب ۵۰° جب ۶۰°}}{\text{جب ۲۰° جب ۳۰°}}$$

$$\therefore \text{پ س} = \frac{\text{۴۶ جب ۵۰° جب ۶۰°}}{\text{جب ۲۰° جب ۳۰°}}$$

$$= \frac{۲۴ \text{ جب } ۴۰^\circ \text{ جسم } ۴۰^\circ}{\text{جب}^۲ ۲۰^\circ} = \frac{۱۲۸ \text{ جم } ۴۰^\circ}{\text{مس } ۲۰^\circ}$$

∴ لوگ پ س = ۷ لوگ ۲ + ل جم ۴۰° - ل مس ۲۰°

= ۲٫۴۳۰۴۹۸۱

∴ پ س = ۲۶۹٫۴۰۰۳۱

س ۳۵ فرض کرو کہ ا اور ب اور س جہاز کے ایسے تین مقام ہین کہ جن سے مشاہدے کئے گئے ہین اور فرض کرو کہ پ اور ق اور ر اور جہاز کے مقابل کے مقام ہین +

تو خط مستقیم ا ب س خط مستقیم پ ق ر کے متوازی ہے نیز کہ

ا ب = ب س اور پ ق = ق ر

فرض کرو کہ شمال کی سمت اور جہاز کے چلنے کی سمت کا درمیانی کا زاویہ ۵ ہے -

نقطہ ب سے ایک ایسا خط مستقیم ا پ کا متوازی کھینچو جو کہ پ ق سے نقطہ م پر ملے تو

$$\text{تو } \frac{\text{ق م}}{\text{ب م}} = \frac{\text{جب ق ب م}}{\text{جب ب ق م}} = \frac{\text{جب ق م ب}}{\text{جب ب ق پ}} = \frac{\text{جب (ب+ا)}}{\text{جب (ا ۵ - ب)}}$$

پھر نقطہ س سے ایک ایسا خط مستقیم ا پ کا متوازی کھینچو جو کہ ق کہ

نقطہ ن پر ملے تب

رن / س ن = جب رس ن / جب ۳ رپ = جب (س - ا) / جب (ہ - س)

لیکن ب ام = س ن اور رن = ۲ ق م کیونکہ رن تو

دو گھنٹے کے عرصہ مین جہاز کے دو نوراستون کا فرق ہے

اور ق م ایک گھنٹہ مین فرق ہے

∴ ۲ جب (ب - ا) / جب (ہ - ب) = جب (س - ا) / جب (ہ - س)

∴ ۲ جب (ہ - س) جب (ب - ا) = جب (س - ا) جب

(ہ - ب) ∴ ۲ (جب ہ جم س - جم ہ جب س) جب (ب - ا)

= (جب ہ جم ب - جم ہ جب ب) جب (س - ا)

اس کو جم ہ پر تقسیم کرو اسطرحسے ہم مس ہ کی قیمت حاصل کرلینگے +

اگر ا + ب + س = π تو د + ی = π ∴ جب د = جب ی ∴ مس پ = ا ۲۲۷ س

ہم دفعہ ۱۹۵ کی مانند کہہ سکتے ہین جب د - جب ی / جب د + جب ی = مس (پ - π/۴)

یعنے ۲ جب (د - ی)/۲ جم (د + ی)/۲ / ۲ جب (د + ی)/۲ جم (د - ی)/۲ = مس (پ - π/۴) اس سے ہم کسمہ کے

لیکن جبکہ اب جم (د + ی)/۲ صفر ہے تو ہم دونو شمار کنندہ اور مخرج کو تقسیم نہین

کرسکتے اور اسطرح سے ہم آگے نہین بڑھ سکتے فی الحقیقت اس حالت مین ایک دائیرہ

نقاط پ اور ا اور س اور ب کے گرد ہوگا اور پ اس قوس کا کوئی ایک

نقطہ ہوگا جو کہ ا اور ب کے درمیان واقع ہے + تمت تمام شد +